Math. P 61-1
Bürja

Mathesis. Geometria Specialis

293.

R

ARCHIMEDE
DESCARTES
NEWTON
LEIBNITZ
EULER
Arithmetica
Algebra
Trigonometria
Analys. infinit.
Geometria Sublimis.
De Seve inv.
Malvieux f.

Erleichterter

Unterricht

in der

höheren Meßkunst,

oder

deutliche Anweisung

zur

Geometrie der krummen Linien.

Von

Abel Bürja,

Prediger bei der französischen Friedrichstädtschen Gemeine in Berlin, und Professor der Mathematik bei der Königlichen Ritter-Akademie daselbst.

Erster Band.

Berlin und Libau,

bei Lagarde und Friedrich,

1788.

Bayerische Staatsbibliothek München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Es giebt Wissenschaften, die oft mehr Schaden als Nutzen stiften, wenn man nur eine geringe Kenntniß derselben erlanget hat, so daß es vielleicht besser wäre gar nichts als nur wenig davon zu erlernen. Wie oft haben nicht halbe Philosophen, halbe Theologen, halbe Politiker, das grösßte Unheil in der menschlichen Gesellschaft gestiftet? Die Geometrie hat den Vorzug, daß sie auch denen gute Dienste leistet, die nur wenig mit ihr vertraut sind. Wer auch nur ihre ersten Anfangsgründe verstehet, kann solche schon mit Vortheil auf manche Fälle, sowohl im gemeinen Leben als in den Künsten anwenden, und hat nicht zu befürchten, daß das wenige was er weiß, ihn zu Trugschlüssen verleiten könne. Viele, ja die meisten, welche aus der Meßkunst nicht ihr Hauptgeschäfte machen, hal-

ten sich bloß an demjenigen, was die gemeine Geometrie von der geraden Linie und dem Zirkel lehret, und dieses schon ist für sie eine Quelle von mancherlei fruchtbaren Anwendungen. Solten sie es auch zu nichts anders gebrauchen, so dienet es ihnen doch, den Geist an Gründlichkeit und Wahrheit zu gewöhnen.

Wen aber die Geometrie ihren Verehrer schon so reichlich belohnet, der nur bis zu ihrem Vorhof gekommen ist, wie hold muß sie nicht ihrem Freunde seyn, der in ihr innerstes Heiligthum eingedrungen ist? Er vergißt die Mühseeligkeiten des Lebens, und sättiget sich mit Wahrheit und Licht. Für ihn bleibt fast nichts verborgen, was Menschen ergründen können. Bald steiget er mit der Fackel, die er aus der Hand seiner Göttin bekam, zu den Höhen des Olymps, und mißt was unermeßlich schien: bald senkt er sich nieder, und beleuchtet die Geschäfte der Erdensöhne; er lehret sie die Kräfte der Natur zu ihrem Vortheile anwenden und vervielfältigen; die Sonnenflammen, mit zerbrechlichem Glase, in einen glühenden Heerd sammlen; ein dünnes Holz auf stürmenden Wellen zum sichern Hafen führen; und dem Donner des Krieges seine Laufbahn bestimmen.

Bevor aber der Geometer zu solchen erhabenen Kenntnissen gelanget, muß er sich freilich durch mühsame Wege durcharbeiten. Eine geraume Zeit muß er sich durch trockne, lange, schwere Rechnungen zu seinem großen Zwecke vorbereiten. Und ehe er sie auf wirkliche Gegenstände der Natur und der Kunst anwendet, muß er seine Kräfte auf dem Papiere an bloßen Linien versuchen; sie auf mancherlei Art wenden, krümmen, verwandeln, gerade machen; ihre Flächen berechnen; sie um ihre Axen drehen, um neue runde Körper zu erhalten. Ohne diese nützliche Vorbereitung, würde er in den weiten Feldern der höheren angewandten Meßkunst, als ein Fremdling ohne Leitfaden in einem Irrgarten erscheinen.

Diese Vorbereitung dem Jünglinge zu erleichtern, haben sich verschiedene achtungswürdige Männer angelegen seyn lassen. Auch ich, der ich weit entfernt bin, mich meinen großen Vorfahren an der Seite zu stellen, wage es, so weit meine Kräfte es erlauben, das meinige zur Verbreitung und Erleichterung der höheren Meßkunst beyzutragen. Einige Erfahrung, sowohl im Selbstlernen als auch im Lehren, hat mir vielleicht bei manchen Lehrsätzen und Aufgaben, die Art gezeiget, wie ein Anfänger

sie am besten begreifen kann. Jedoch ist es nicht meine Absicht, meine Methode als die beste von allen zu empfehlen. Gefällt sie jemanden, so werde ich mich seines Beifalls erfreuen. Glaubet aber jemand einen bequemeren Weg gefunden zu haben, so wird er, ohne meine Erlaubniß, in demselben fortwandern. Viele Wege führen ja nach Rom. Einer muß zwar der kürzeste seyn, vielleicht aber ist er nicht eben der sicherste und bequemste; und unter der unendlichen Anzahl der übrigen, mögen wohl mehrere gleich gut und gleich kurz seyn.

Meine Eigenliebe ist nicht so groß, als daß sie mich bewogen hätte, bloß um der Neuigkeit willen, von den bekannten Methoden abzuweichen. Wo ich nichts deutlicheres zu sagen wuste als meine Vorgänger, da habe ich mich nicht gescheuet, ihre Arbeiten zu benutzen. So habe ich mich, was die Kegelschnitte betrift, meistens an Bézout (Cours de Mathématique à l'usage du Corps royal de l'Artillerie) gehalten, und in den ersten Hauptstücken meines Werkes wird man manches antreffen, was aus dem seinigen fast wörtlich übersetzet ist. Was ich von den krummen Linien überhaupt, und ihrer Vorstellung durch algebraische Gleichungen gesaget habe, wird man zum Theile in der Introduction

duction à l'Analyse des lignes courbes Algébriques par Gabriel Cramer, wieder finden. Hingegen in dem größten Theile meiner Arbeit, das ist, in der Anwendung der Differenzial- und Integral-Rechnung auf die krumm[illegible] Linien, habe ich keinen vorzüglichen Wegweiser genommen, sondern alles so vorgetragen, wie es mir selbst am faßlichsten zu seyn schien. Jedoch habe ich, weder des Marquis de l'Hopital Analyse des infiniment petits, noch des Herrn Cousin Leçons de Calcul différentiel & de Calcul intégral, noch andere gute, sowohl deutsche als französische und lateinische Anleitungen unbenutzet gelassen. Der sachverständige Leser wird in meinem Werke verschiedene Beweise und Wendungen antreffen, die entweder neu sind, oder wenigstens in deutschen Schriften noch nicht gebrauchet worden. Denn billiger Weise solte jedes neue Buch für seine vermuthlichen Leser etwas neues und originales enthalten. Dem Leser allein kömmt es alsdann zu, zu urtheilen, ob er etwas darin findet, wovon er Gebrauch machen könne. Der Verfasser wagt es, seine Gedanken, womit er selbst nicht allemal zufrieden ist, vorzutragen. Er ist nicht der beste Richter seiner selbst, und deswegen überläßt er dem Publikum sein Urtheil zu fällen, und unter der

Menge seiner Einfälle das Gute auszuwählen und zu behalten.

In solcher Gemüths-Verfassung pfleget ein vernünftiger Schriftsteller seine Werke in die Welt zu schicken; und wollte der Himmel sie würden allemal aus dem nämlichen Gesichtspunkte beurtheilet! Dieses ist aber leider der seltenste Fall. Der Verleger einer Monatsschrift schicket ein neues Buch demjenigen unter den Mitarbeitern den er für tüchtig hält, es zu beurtheilen. Dieser nun ist selbst ein Auktor oder ein Lehrer im nemlichen Fache; er hat seine Methode, woran er gewöhnt ist. Was von derselben abweicht ist ihm auffallend, und der erste Hang des Menschen bei ungewöhnten Dingen ist allemal dieselben zu tadeln und zu verwerfen. Freilich würde man nach einer gehörigen Prüfung oft sein Urtheil ändern; allein ein Rezensent hat nicht Zeit sich in solche Prüfung einzulassen. Er ist froh, wenn die Rezensiou fertig ist, und da er incognito rezensiret, so ist ihm eben nicht viel daran gelegen, ob sein Urtheil gerade oder schief ausfällt. Was ich hier von Rezensenten sage, gilt nicht von allen, sondern von vielen und vielleicht von den meisten. Ich selbst will nicht dafür stehen, wenn ich die Ehre hätte ein Recensent zu seyn, daß ich mich nicht der Bequem-

lichkei-

lichkeiten dieses Amtes bedienete. Man fragte einen Philosophen was er thun würde, wenn er einst reich und mächtig werden solte? ob er nicht anders handeln würde, als die meisten Großen der Welt? er antwortete: eben so gut könntet ihr mich fragen, was ich thäte, wenn ich ein Wolf würde. Keiner kann für sich selbst Bürge seyn, und gar zu oft verändert das Amt den Sinn.

In der ungeheuren Menge von Rezensionen, womit Deutschland überschwemmt ist, behaupten diejenigen, welche in der allgemeinen deutschen Bibliothek erscheinen, einen vorzüglichen Platz. Unter denselben habe ich auch eine über meinen selbstlernenden Algebristen angetroffen; und diese Vorrede wird die bequemste Stelle seyn, wo ich meine Meinung darüber erklären kann.

Der Herr Rezensent hat mit Recht bemerket, daß es ein Versehen war, da ich Diophantes anstatt Diophantus schrieb. Indessen war ich es schon selbst, ein halbes Jahr vor der Erscheinung dieser Rezension, gewahr geworden, und hatte es am Ende meiner Geometrie unter den Druckfehlern und Verbesserungen des selbstlernenden Algebristen angezeiget. Von gleicher Art ist ohngefähr die Stelle wo ich 72, anstatt 64, für den Würfel von 4 an-

gegeben hatte. Auch gestehe ich, daß ich richtiger geredet hätte, wenn ich an einem Orte, den der Herr Rezensent anführet, Exponent, anstatt Potenz geschrieben hätte.

Nicht so leicht kann ich einiges zugeben, was der Herr Rezensent tadelt, aber nur seiner eigenen Meinung zufolge, da es Dinge betrift, welche unter den Gelehrten noch nicht entschieden sind. Hierher gehöret die neuere Rechtschreibung deren ich mich bediene, indem ich die fremden Kunstwörter so schreibe, wie sie im Deutschen ausgesprochen werden. Vielleicht wohl wird sie ein Anfänger das erstemal buchstabiren müssen, aber wenigstens wird er sie richtig buchstabiren und ordentlich aussprechen. Es wäre unbillig, zu verlangen, daß jemand, der die Mathematik erlernen will, vorher Griechisch, Lateinisch und Französisch lesen lerne. Jedoch kömmt es mir nicht zu hierüber ein Urtheil zu sprechen, da ich mich für keinen sonderlichen Kenner der deutschen Sprachkunst ausgebe. Was ich davon weiß, ist so eben zu meiner Nothdurft hinreichend. Unter die streitigen Dinge gehört ferner der Ursprung des Wortes Algebra: es war mir zwar schon bekannt, daß einige (wie es der Herr Rezensent anführet) dieses Wort von den Brüchen herleiten:

da es aber hierüber andere eben so wahrscheinliche Meinungen giebt, welche in dem Artikel Algebra der Encyclopedie nachgelesen werden können, so hielt ich es für rathsamer, die Abstammung unentschieden zu lassen. Was meine Methode betrift, so habe ~~ich~~ ich nicht den Beifall des Herrn Rezensenten darinn, daß ich allemal die Rechnungsarten erstlich in Buchstaben lehre, und hernach die bewiesenen Wahrheiten auf Zahlen anwende: er hält es für faßlicher, wenn die Zahlen voran gehen. Indessen da er selbst einem jeden die Methode lassen will, die ihm am besten scheinet, so will ich auch die seinige nicht antasten. Nicht ganz so gelassen spricht der Herr Rezensent von dem Versuche, den ich gemacht habe, die Algebra gänzlich von der Geometrie abzusondern. Dieses scheinet ihm ein verwegenes Unternehmen zu seyn, und er wenigstens möchte es nicht wagen, einen Schüler so gerades Weges von der Regel Detri bis zur Variazions-Rechnung zu führen. Man siehet aber doch aus meinem Buche, daß es wirklich angehet: und warum sollte man der Algebra die Ehre nicht wiederfahren lassen, welche die Ontologie, die Kosmologie und andere Theile der Philosophie erhalten haben, die ehedem nur stückweise hin und her zerstreuet lagen, jezt aber ein

eigenes

eigenes System ausmachen. Diese Absonderung der Wissenschaften ist allemal der Weg, wodurch sie zu einer grösseren Vollkommenheit gedeihen. Auch ist meine Methode eben nicht neu. Was ich für die ganze Algebra gethan habe, daß hatte der große Euler schon für die Anfangsgründe derselben gethan. In seiner vollständigen Anleitung zur Algebra ist nicht ein Wort von Geometrie oder Mechanik anzutreffen. Was aber der Herr Rezensent am wenigsten verdauen kann, ist, daß dieser Plan mich bewogen hat, die Zirkelgrößen, welche heutiges Tages in der Integral-Rechnung häufig vorkommen, bloß als unendliche Reihen zu betrachten. Der Schüler, meinet er, wird immer fragen, woher denn solche Reihen eigentlich entstehen, und was sie zu bedeuten haben. Aber eben so gut kann er auch bey der Arithmetik fragen, woher die Quadratzahlen, Kubikzahlen, Polygonalzahlen ihren Ursprung haben? Man antwortete ihm: Freund, nimm unterdessen das Ding so an, wie ich dir es gebe, und denke dir dabei weiter nichts als was ich dir sage: ein mehreres wirst du in der Folge erfahren. Was die Bezeichnungen betrift, die ich für die trigonometrischen Reihen gebrauchet habe, so will ich gern andere annehmen, wenn bequemere vorgeschlagen werden.

Nur

Nur ganze Wörter möchte ich nicht gern in Rechnungen gebrauchen. Es sollte darinn billiger Weise nichts anders vorkommen als Buchstaben, womit die Quantitäten angedeutet werden, und kurze Zeichen, welche ihre Verbindung oder Entstehung zu erkennen geben.

Dieses wären also, die zweifelhaften Dinge, worinn ich von der Denkungsart des Herrn Rezensenten abweiche. Zuletzt aber muß ich noch einiges anführen, worinn er, meines Erachtens, irret. Da ich die Entstehung der höheren Gleichungen aus einfachen Gleichungen, wie $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, u. s. w. herleite, so glaubet er, dieses setze den Widerspruch voraus, daß eine und dieselbige Größe x zugleich $= 2$ und $= -3$ seyn könne. Warum aber sollte eine veränderliche Größe x nicht mehrere Werthe annehmen können? Warum sollte ein Buchstabe x nicht mehrere Größen zugleich vorstellen können? Wird aber diese Möglichkeit zugestanden, so fällt der vermeinte Widerspruch von selbst weg. Ohne Grund werde ich einer Dunkelheit beschuldiget, da ich im zehnten Hauptstücke diesen Satz beweise: daß wenn a sich logarithmisch verhält zu b, wie c zu d, alsdann sich auch a logarithmisch verhalte zu c wie b zu d. Dieses heißt mit anderen Worten,

wenn

wenn *b* die so vielte Potenz von *a* ist, als *d* von *c*, so ist auch *c* die so vielte Potenz von *a* als *d* von *b*. Der Herr Rezensent hatte vermuthlich nicht den 3ten § im VIten Hauptstücke bemerket, welcher die vermeinte Dunkelheit des Beweises gänzlich aufhebet. Jedoch ein Rezensent, der ein Buch bloß durchblättert, um es zu beurtheilen, kann freilich nicht den Zusammenhang der Lehren so genau einsehen, als einer der es Zeile für Zeile zu seinem Unterrichte lieset. Dieses eilige Durchblättern ist vermuthlich auch die Ursach, warum mich der Herr Recensent beschuldiget, daß ich den Leser in dem Irrthume gelassen habe, als wären die Differenziale nur beinahe wahr, also bloße Näherungen. Er meinet bey mir nicht ein Wort gefunden zu haben, das diesem Irrthume vorbeugen könne. Hier muß der Herr Rezensent des Rezensirens müde geworden, und eingeschlummert seyn. Denn sonst würden ihm nicht neun ganze Paragraphe (XVI H. §. 13. bis 21.) entschlüpft seyn, die vorsetzlich deswegen da stehen, um dem Leser dasjenige vor Augen zu legen, was der Herr Rezensent nicht gesehen hat, daß nemlich die Differenziale oder unendlich kleinen Differenzen die Grenzen der vollständigen oder endlichen Differenzen sind. Als Grenzen also sind die Differenziale nicht beinahe

sondern

sondern vollkommen wahr. Unter die Irrthümer des Herrn Rezensenten muß ich doch dieses rechnen. Ich habe irgendwo gesagt, daß ich dasjenige aufs strengste beweisen wollte, was bei vielen nur als bloße Erfahrungs-Wahrheit angenommen wird. Hier erschrickt der Herr Rezensent, und ruft aus: Erfahrungs-Wahrheiten als Gründe der Rechenkunst! Höchstens, setzet er hinzu, nimmt so was der handwerksmäßige Rechenmeister an. Da sich nun der Herr Rezensent vermuthlich schon von seinem Schrecke erholet haben wird, so beliebe derselbe Eulers Anleitung zur Algebra (I. Abschnitt. §. 27.) nachzuschlagen; da wird er sehen, daß Euler selbst, der nicht ein handwerksmäßiger Rechenmeister war, bloß durch die Erfahrung beweiset, daß $ba = ab$. Er saget, man darf nur für a und b bestimmte Zahlen setzen, als 3 und 4, da sich dann von selbst geben wird, daß 3mal 4 eben so viel ist als 4mal 3. Im nemlichen Werke (§ 119.) schließet Euler, nach einigen wenigen Exempeln von Quadraten der Brüche, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat auch immer einen Bruch enthalte. Sind dieses nicht bloße Erfahrungen? Und wie viel Lehrbücher giebt es nicht, wo die Newtoinsche Binomial-Regel, bloß aus den

 fünf

fünf oder sechs ersten Potenzen von $a \pm b$ abstrahiret wird. Kann eine solche Analogie nicht auch zu den bloßen Erfahrungen gerechnet werden? Ueberhaupt giebt es gar viele mathematische Bücher, wo dergleichen Erfahrungen und Analogien bei manchen Lehren als Axiomen angenommen werden, nicht weil die Verfasser handwerksmäßige Rechenmeister waren, sondern weil sie sich nicht gern lange bei den ersten Gründen aufhalten wollten, und zu wichtigeren Dingen eileten. Dieses habe ich jedoch in meinem selbstlernenden Algebristen zu vermeiden getrachtet. Wenn ich den Herrn Rezensenten recht verstehe, so behauptet er, jede unendliche Reihe drücke eigentlich eine Größe aus, welche unendlich viel Werthe hat. Es sey $x = \sqrt{(z^2 \pm a^2)}$, so kann ich x durch eine unendliche Reihe ausdrücken, welche eine Funkzion von z ist, es wird aber schwerlich bewiesen werden können, daß zu jedem Werthe von z unendlich viel Werth von x, et vice versa, gehören.

Indessen kann ich mich irren, und vielleicht ist irgend ein Druckfehler in dieser Stelle der Rezension. Denn in derselben habe ich so häßliche Druckfehler angetroffen, daß ich mir nicht getraue zu behaupten, daß ich den Sinn allemal recht gefaßt habe. Was sind zum Beispiele, größte und kleinste Logarithmen?

men? Was bedeuten diese Worte: Größen exponiren, nennt er, zur wievielten Potenz eine Größe erhoben werden muß. Es heißt ferner, ich bezeichne gewisse trigonometrische Reihen mit $2x$, $2'x$, u. dergl. mehr, welches mir nie in dem Sinn gekommen ist.

Aber genug hiervon. Steitigkeiten zwischen Verfasser und Rezensenten erwecken meistens nur den Eckel der Leser. Um die meinigen angenehmer zu unterhalten, will ich ihnen etwas von der Geschichte desjenigen Theiles der Mathemathik, den ich jezt vortragen werde, erzählen.

In der Vorrede meines selbsterlernenden Geometers findet man zwar eine kurze Geschichte der ganzen Meßkunst, worinn die Schicksale der höheren Geometrie nicht gänzlich übergangen sind. Jedoch wird der Leser vielleicht, bei Gelegenheit des gegenwärtigen Werkes, etwas mehr von den Männern erfahren wollen, welche die Lehre von den krummen Linien, und die dahin einschlagenden Rechnungs-Arten, besonders befördert haben. Savérien, in seiner Histoire des progrès de l'Esprit humain dans les sciences exactes, soll vorzüglich, jedoch nicht allein, unser Wegweiser seyn. Ohngefähr 350 bis 400 Jahr vor Christi Geburt, zur sel-

bigen Zeit da Plato in Griechenland Philosophie mit Mathematik verbunden lehrte, lebte Eudoxius, zu Gnidus in Klein-Asien. Er war zugleich Geometer, Astronom, Arzt, und Gesezgeber seiner Vaterstadt. Er ist der älteste Geometer, von dem man weiß, daß er sich mit den Kegelschnitten und anderen krummen Linien beschäftiget habe. Das Beispiel dieses arbeitsamen Mannes munterte zwei Brüder auf, sich mit gleichem Eifer auf die Geometrie zu legen. Sie hießen Menechmus und Dinostratus. Der erste sezte die Untersuchungen des Eudoxius über die Kegelschnitte fort, und der andere erfand eine krumme Linie, welche noch heut zu Tage die Quadratrix des Dinostratus genannt wird. Er hoffete mit Hülfe derselben den Zirkel zu quadriren, und jeden Zirkelbogen in beliebige gleiche Theile einzutheilen. Euklides, der ohngefähr 300 Jahr vor Christi Geburt seine allgemein bekannte Elemente schrieb, begnügte sich die Lehre von der geraden Linie und vom Zirkel vollkommen zu entwickeln, und that nichts zur Beförderung der höheren Geometrie. Hingegen sein Zeitgenosse und Freund (vielleicht auch sein Schüler) Aristäus bereicherte die Mathematik mit zwei Schriften, die ihm einen großen Ruhm erwarben. Die eine handelte von den

Kegel-

Kegelschnitten, und die andern von den *Locis solidis*. Beide sind aber verloren gegangen. Wenn man bedenket, was der Beifall eines Euklides zu bedeuten hat, so kann man den Verlust dieser Werke nicht genug bedauren.

So bekam die höhere Geometrie allmählich eine feste Gestalt, und ihre Lehren wurden in ein bündiges System zusammen verknüpft. Keiner aber unter den Alten hat diese Wissenschaft mit so wichtigen Entdeckungen bereichert als Archimedes. Dieser große Mann wurde 287 Jahr vor Christi Geburt zu Syrakusä in Sizilien geboren. Er stammte aus einem berühmten Geschlechte her, und war mit dem Könige Hiero verwandt. Er entsagte aber allen Ehrenämtern, die ihm seine hohe Geburt versprach, um sich gänzlich der Mathematik zu widmen. Hiero, sein König und sein Freund, unterhielt sich täglich mit ihm über die Theorie und die Anwendung der Wissenschaften. Denn Archimedes glaubte, es sei die Pflicht eines Gelehrten, seine Kenntnisse und Entdeckungen auf gemeinnützige Gegenstände anzuwenden. Diese Denkungsart äußerte er vorzüglich, da seine Vaterstadt von den Römern belagert wurde. Während dieser Zeit war er beständig beschäftiget, um neue Kriegs-Werkzeuge zu erfinden, welche dem Feinde die

nahme der Stadt sehr beschwerlich machten. Endlich gelang es doch dem Befehlshaber Marcellus, die Stadt zu überraschen. Archimedes, der eben mit der Auflösung einer Aufgabe beschäftiget war, hatte noch nichts von diesem plözlichen Ueberfalle erfahren, da ein Römischer Soldat in sein Zimmer trat, und ihn fragte, wie er hieße? Der Geometer bat den ungestümen Kriegesmann ihn nicht zu stören. Dieser aber wurde über eine solche Antwort wütend, und tödtete augenblicklich den Grübler, den er nicht kannte. Dieses geschahe 212 Jahr vor Christi Geburt. Es ist hier nicht der Ort, alles anzuführen, was Archimedes in der Mathematik gethan hat. Was die höhere Geometrie belanget, so machte er einen neuen Schritt in derselben, da er die Eigenschaften derjenigen Körper untersuchte, welche aus der Umwendung der Kegelschnitte um ihre Axen entstehen, und die er Konoïden nannte. Er erfand ferner die Quadratur desjenigen Kegelschnitts, der in der Folge den Namen Parabel bekommen hat, und untersuchte die Natur derjenigen Linie, welche von ihm den Namen der Archimedischen Spiral-Linie bekommen hat. Anfänglich hofte er, diese Linie würde ihn zur Quadratur des Zirkels führen; aber er sahe bald ein, daß er sich geirret hatte.

Während daß Archimedes zu Syrakusä den größten Ruhm erwarb, lebte Eratosthenes in Aegypten, wo er die Aufsicht über die große Bücherſammlung zu Alexandria hatte. Er war zugleich Redner, Dichter, Alterthums-Forſcher, Philoſoph und Mathematikus. Er ſchrieb ein mathematiſches Werk unter einem Titel, den man auf lateiniſch überſezet hat, *de locis ad medietates*. Seine übrigen Schriften und Erfindungen gehören nicht hierher.

Eratoſthenes, ſagt Savérien, hatte einen Nachfolger, der zwar ein großer Mann und ein ſehr arbeiſamer Gelehrter war, der aber zugleich Eigenliebe und Stolz im höchſten Grade beſaß; er war zu Perga in Klein-Aſien geboren, und hieß Apollonius. Sollte Savérien hier nicht aus dem Rhodiſchen und dem Pergiſchen Apollonius eine einzige Perſon gemacht haben? Der Rhodier war in der That ein Nachfolger des Eratoſthenes in der Aufſicht über die Alexandriniſche Bibliothek, und mochte deswegen für ſtolz gehalten werden, weil er, aus Verdruß über die Kritiken, die ihm ſeine Gedichte zuzogen, ſeine Vaterſtadt Alexandria verließ, und ſich nach Rhodus begab, daher er den Beinamen Rhodier bekam. Hingegen Apollonius der Perger, der zur

selbigen Zeit lebte, war bloß ein Mathematiker, und schrieb über die Kegelschnitte, welche er durch die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel unterschied, die man seitdem beibehalten hat. In diesem Werke, wovon ein beträchtlicher Theil bis auf uns gekommen ist, untersuchte er unter andern, welches die größten und kleinsten geraden Linien wären, die aus einem beliebigen Punkte bis zum Umfange jedes Kegelschnittes gezogen werden könnten, und legte dadurch den Grund zu den wichtigen Aufgaben von den größten und kleinsten Werthen der veränderlichen Größen, welche in neueren Zeiten so sorgfältig untersuchet worden. Dieses Werk des Apollonius war dazumal in der höheren Geometrie, was die Elemente des Euklides für die gemeine Meßkunst waren, und zum Theile noch jezt sind. Das Werk des Apollonius wurde mannigfaltig übersezt und erkläret. Man betrachtete es als eines der tiefsinnigsten Arbeiten, die je der menschliche Verstand ans Tageslicht gebracht hätte.

Die Bemühungen des Apollonius verbreiteten ein großes Licht über die Lehre von den krummen Linien. Verschiedene Geometer versuchten es, noch neue krumme Linien zu den Kegelschnitten hinzu zu setzen. Kaum hatte Apollonius seine Laufbahn geendi-

endiget, da Nikomedes eine krumme Linie erfand, welche er die Kondoïde nannte, und deren er sich bediente, um die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels aufzulösen. Blondel hält dafür, daß sie noch jezt anf eine nüzliche Art gebrauchet werden könne, um die allmälige Abnahme einer Säule in der Baukunst vorzustellen.

Die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels hängt von einer anderen ab, nemlich von der Erfindung zweier mittlerer Proporzional-Linien zwischen zwei gegebenen Linien. Bei der Untersuchung dieser lezten Aufgabe verfiel ein Geometer, Namens Diokles, auf eine krumme Linie, welche er die Zissoïde nannte. Er wollte sie auch gebrauchen um jeden Winkel in drei gleiche Theile einzutheilen; aber der Erfolg entsprach nicht seinen Hofnungen. Auch erfand Diokles die Auflösung einer sehr schweren Frage, womit sich Archimedes schon beschäftiget hatte, nemlich: eine Kugel, vermittelst einer Ebne, nach einem gegebenen Verhältnisse zu schneiden.

Im lezten Jahrhunderte vor Christi Geburt lebten Isidorus und Eutocius. Der erste beschäftigte sich mit der Verdoppelung des Würfels, und erfand ein Mittel, um die Parabel, vermöge einer stetigen

Bewegung zu beschreiben. Der andere erklärete die Werke des Archimedes und des Apollonius.

Dieses waren fast die lezten Bestrebungen der alten Geometer. Man glaubte den höchsten Gipfel der Kunst erreichet zu haben, und dieser Gedanke schlug allen Muth nieder, so daß man kaum mehr versuchte, etwas neues zu erfinden. Wenn sich jemand auf die Meßkunst legte, so glaubte er, es wäre nun nichts mehr zu thun, als sich mit den Entdeckungen seiner Vorgänger bekannt zu machen. Dieses that Geminus, der Rhodier, kurz vor Christi Geburt. Er schrieb ein Buch unter dem Titel Enarrationes Geometricae, in welchem er auf eine sehr deutliche Art das vornehmste anführte, was je in der Geometrie entdecket worden war, sowohl über die gerade Linie und den Zirkel, als auch über die krummen Linien.

Vielleicht hätte Geminus mehr gethan, wenn er mehr Aufmunterung gefunden hätte. Allein zu seiner Zeit hatten die Römer die Herrschaft der damals bekannten Welt erlanget, und dieses kriegerische Volk hatte keine sonderliche Achtung für die abstrakten Wissenschaften, und für diejenigen, die solche Wissenschaften bearbeiteten. Jedoch fanden sich noch dann und wann Männer, welche sich in

Stille und ohne viel Aufsehen mit der Meßkunst beschäftigten. Dergleichen waren Theodosius, der im ersten Jahrhunderte nach Christi Geburt die Lehrsätze von den krummen Linien sammlete, und eine Abhandlung darüber schrieb, dessen Lieblings-Studium aber die Astronomie war; Menelaus, der sich auch im 2ten Jahrhunderte mit den krummen Linien und zugleich mit der Trigonometrie beschäftigte; Serenus, welcher im 3ten Jahrhunderte bewieß, daß die Ellipse, die aus dem Schnitte eines Zylinders entstehet, die nemliche ist, welche unter die Kegelschnitte gehöret; endlich Philon, der gegen die nemliche Zeit Versuche machte, um neue krumme Linien zu erfinden. Nun nahm der Eifer für die Geometrie immer mehr und mehr ab, und diese Wissenschaft lag in den lezten Zügen. Man findet einige Spuren derselben bis ins funfzehnte Jahrhundert, da Purbach und sein Gehülfe Müller, der unter den Namen Regiomontanus bekannt ist, (weil er aus einer kleinen Stadt, Namens Königsberg, gebürtig war) sich auf die Trigonometrie legten, und diesen Theil der Geometrie zu einer größern Vollkommenheit brachten.

Sehr langsam fieng der Geschmack für die Geometrie wieder an aufzuleben. Das funfzehnte Jahrhun-

hundert verfloß, ohne daß man sich viel mit dieser Wissenschaft beschäftigte. Im sechzehnten Jahrhunderte wurde Tartalea oder Tartaglia ein Meßkünstler, weil ihn anfänglich die Noth dazu zwang. Er war ein sehr junger und armer Soldat. Er wurde stark am Kopfe verwundet, muste seinen Stand verlassen, und fieng an fast ohne Hülfe lesen und schreiben zu lernen. Allmälig fand er Geschmack an Büchern und an Wissenschaften, vorzüglich an der Mathematik. Er machte nicht allein Entdeckungen in der Algebra, sondern war auch der erste, der die Bewegung der geworfenen Kugeln untersuchte. Denn hiervon handelt seine nova Scientia.

Das Beispiel des Tartaglia war nicht unfruchtbar. Ein Arzt, Namens Friedrich Commandinus, vernachläßigte beinahe die Heilkunst, aus Eifer für die Meßkunst, und übersezte verschiedene Werke der Alten, sowohl über die gemeine, als über die höhere Geometrie. Maurolicus, oder Maurolyco, trat in die Fußtapfen des Commandinus, und besorgte den Druck verschiedener Bücher der Alten über die Geometrie. Er selbst entdeckte einige neue Eigenschaften der Kegelschnitte, und bewieß verschie-

schiedene Lehrsätze, welche sich auf die Tangenten und Asymptoten der Hyperbel beziehen.

Wir wollen uns nicht bei einigen Geometern des sechszehnten Jahrhunderts aufhalten, die zwar dazu beitrugen, daß diese Wissenschaft je mehr und mehr ihr altes Ansehen wieder erlangte, sich aber wenig oder gar nicht mit der höheren Meßkunst beschäftigten. Jedoch können wir den Nonius nicht unerwähnet lassen, welcher nicht nur die bequeme Abtheilung der Grade des Winkelmessers in Minuten und Sekunden erfand, welche seinen Namen führet, sondern auch diejenige krumme Linie untersuchte, welche ein Schiff beschreibet, wenn es alle Mittagslinien unter einerlei Winkel durchschneidet, und welche die Loxodromie genannt wird. Dieser Nonius war ein Portugiese, und er that alles was in seinem Vermögen stand, um die mathematischen Wissenschaften in seinem Vaterlande in Aufnahme zu bringen.

Im Anfange des 17ten Jahrhunderts beschäftigten sich die Mathematiker vorzüglich mit der Trigonometrie und mit der Ausmessung des Zirkels. Auf diese Theile der Geometrie legten sich vorzüglich Adrianus Metius, Adrianus Romanus, Ludolph van Ceulen, Johann Werner, Rhäticus, Byrge,

(der

(der Erfinder der Logarithmen und des Proporzional-Zirkels in Deutschland), Neper, Briggs Vlacq, Snellius, und andere mehr, welche aber nicht hierher gehören, weil in ihren Arbeiten wenig oder gar nichts von den krummen Linien anzutreffen ist. Zur selbigen Zeit erfand Lucas Valerius, ein Italiener, eine neue Quadratur der Parabel.

Merkwürdiger waren Keplers Entdeckungen, welche gegen das Jahr 1615 erschienen. Dieser berühmte Mann führte in die Geometrie die Betrachtung des Unendlichen ein, und lehrte, wie, vermittelst dieser Hypothese, die schwersten Aufgaben, welche den Alten so viel Mühe gekostet hatten, auf eine kurze und leichte Art aufgelöset werden könnten. Er setzte den Zirkel aus unendlich vielen Dreiecken zusammen, den Kegel aus unendlich vielen dreieckigten Pyramiden, den Zylinder aus unendlich vielen dreieckigten Prismen, u. s. f. Er erweiterte auch die Lehre von den Konoïden und Sphäroïden, und bildete sie nicht bloß, wie Archimedes und seine Nachfolger, durch die Umwendung der Kegelschnitte um ihre Axen, sondern durch die Umwendung derselben, um jede beliebige gerade Linie, innerhalb oder außerhalb der Figur.

So

So merkwürdig auch diese Entdeckungen sind, so sind sie doch nicht der Hauptgrund des unsterblichen Ruhmes, den sich Kepler erworben hat. Die Astronomie war sein Lieblings-Studium, und diese Wissenschaft erkennet ihn als ihren Gesezgeber.

Kurz nach Keplers Tode, gab Cavalieri, ein Mayländischer Jesuat (nicht Jesuit) seine Geometria indivisibilium heraus, worin er die Entstehung der Körper aus unendlich vielen Flächen, der Flächen aus unendlich vielen Linien, und der Linien an unendlich vielen Punkten lehret. Man siehet also, daß seine Methode mit der Keplerschen viel Aehnlichkeit hatte. Außerdem schrieb er ein Werk über die Kegelschnitte, welches mit vielem Beifalle aufgenommen wurde, und untersuchte in der Folge verschiedene Aufgaben, welche sich auf diese Linien bezogen.

In der zweiten Hälfte des 17ten Jahrhunderts machte die Geometrie noch merklichere Fortschritte. Fermat entdeckte höhere Gattungen von Parabeln und Spirallinien. Roberwal entdeckte die Zykloïde und verschiedene Eigenschaften derselben. Pascal sezte die Untersuchungen über diese Linie weiter fort. Kartesius (Descartes) erwarb sich

unter

unter den Geometern einen unsterblichen Ruhm. Er erfand sinnreiche Methoden, die Tragenten der krummen Linien zu ziehen, die grösten und kleinsten Applikaten zu bestimmen, und die Biegungs-Punkte zu finden. Da er die Natur der krummen Linien durch algebraische Gleichungen ausdrückete, so war es nur ein Spiel für ihn, neue Linien zu erfinden, und ihre Eigenschaften zu beweisen. Seit der Zeit hat die höhere Geometrie eine ganz neue Gestalt bekommen.

Nun glaubte man die Konstrukzion der krummen Linien so in seiner Gewalt zu haben, daß keine mehr unmöglich wäre. Hudde wolte sogar eine krumme Linie ziehen, welche die Gesichtszüge eines bekannten Menschen nachahmen solte, und die Natur derselben durch eine algebraische Gleichung ausdrücken. Dieses Unternehmen kann nicht anders als ein witziger Einfall betrachtet werden, obgleich Leibnitz selbst ganz ernsthaft davon gesprochen hat.

Fermat hatte schon bei der Untersuchuug der Tangenten, etwas dem Differenzial-Dreiecke ähnliches gebrauchet. Barrow aber entwickelte diese Methode etwas mehr, obgleich er es nur bei Gelegenheit that, und ohne diese Erfindung für sehr

wichtig auszugeben. Er war der Differenzial-Rechnung sehr nahe, oder vielmehr war seine Bestimmung der Tangenten schon eine Art von Differenzial-Rechnung, die aber noch keinen eignen Algorithmum hatte.

Es fehlte also nur noch ein Schritt bis zur Infinitesimal-Rechnung. Diesen Schritt machten zugleich **Newton** in England und **Leibnitz** in Deutschland. Beide erfanden die ersten Gründe dieser Rechnung, obgleich mit einiger Verschiedenheit der Zeichen und Benennungen. Durch diese Erfindung allein würden **Leibnitz** und **Newton** schon einen unsterblichen Ruhm verdienen, wenn sie auch sonst kein anderes Recht dazu hätten.

Nachdem die Rechnung des Unendlichen erfunden war, so verließen die Geometer fast alle andere Untersuchungen, um sich vorzüglich mit der neuen Rechnung zu beschäftigen, und vermittelst derselben die schwersten Fragen aufzulösen. Hierdurch erwarben sich beide Brüder **Bernoulli** (Jakob und Johann), wie auch der Marquis de l'Hopital den größten Ruhm.

Auf solche Art verstrich das Ende des 17ten Jahrhunderts und der Anfang des 18ten. Da aber die neue Rechnung von verschiedenen Geometern,

als

als schlecht gegründet und zweifelhaft angegriffen wurde, so übernahmen es einige gelehrte, als Maclaurin, Simpson, Müller, die Gründe derselben aufs strengste zu beweisen.

Seit der Zeit bis auf den heutigen Tag haben die Geometer fast kein anderes Geschäft gehabt, als die Differenzial- und Integral-Rechnung zu erweitern, zu erleichtern, auf mehrere Fölle anzuwenden, und durch neue Gründe zu bestätigen. D'Alambert hat bewiesen, daß ein Differenzial-Verhältniß wie $dy : dx$, weiter nichts ausdrückt, als die Gränze des Verhältnisses zwischen den Differenzen der Grösen y und x. Euler hat sowohl die Theorie als die Anwendung der Infinitesimal-Rechnung vielfältig erweitert. Zu lang würde diese Vorrede werden, wenn wir alle Geometer des jetzigen Jahrhunderts nennen wolten, sowohl noch lebende als verstorbene, denen die höhere Meßkunst ein neues Licht zu verdanken hat.

Inhalt

Inhalt der Hauptstücke und der Anhänge.

Erster Band.

Erstes Hauptstück. Von den Kegelschnitten. Seite 1

Zweytes Hauptstück. Von den Tangenten der Kegelschnitte. S. 64

Drittes Hauptstück. Von den Diametern der Kegelschnitte. S. 84

Viertes Hauptstück. Von der Konstrukzion der Gleichungen des zweiten Grades, vermittelst der Kegelschnitte. S. 129

Fünftes Hauptstück. Auflösung einiger geometrischer Aufgaben, vermittelst der Kegelschnitte. S. 163

Sechstes Hauptstück. Von den krummen Linien überhaupt. S. 205

Siebentes Hauptstück. Von einigen Rechnungsarten, die bei der Lehre von den krummen Linien vorfallen. S. 230

Achtes Hauptstück. Von den Tangenten der krummen Linien mit rechtwinklichen Koordinaten. S. 280

Neuntes Hauptstück. Von den Halbmessern der Krümmung und von den Evoluten, für rechtwinkliche Koordinaten. S. 306

Zehntes Hauptstück. Von einigen merkwürdigen Punkten in den krummen Linien, welche rechtwinkliche Koordinaten haben. S. 329

Zwei-

Zweiter Band.

Eilftes Hauptstück. Von der Größe der krummen Linien, wie auch der daraus entstehenden Flächen und Körper, alles für rechtwinkliche Koordinaten. Seite 2

Zwölftes Hauptstück. Von Linien mit schiefwinklichen Koordinaten. S. 35

Dreizehntes Hauptstück. Von den Logarithmen und der logarithmischen Linie. S. 58

Vierzehntes Hauptstück. Von den Differenzialen und Integralen der Zirkelgrößen. S. 90

Funfzehntes Hauptstück. Von der Zykloïde. S. 109

Sechszehntes Hauptstück. Von den krummen Linien, die um einen Pol oder einen unverrückten Punkt beschrieben sind. S. 137

Siebenzehntes Hauptstück. Von doppelt gekrümmten Linien, und von krummen Flächen. S. 162

Achtzehntes Hauptstück. Von Linien, die einander berühren oder schneiden. S. 196

Neunzehntes Hauptstück. Von der Variazions-Rechnung und deren Anwendung auf die Geometrie. S. 223

Anhänge.

Erster Anhang. Von geometrischen Instrumenten. S. 277

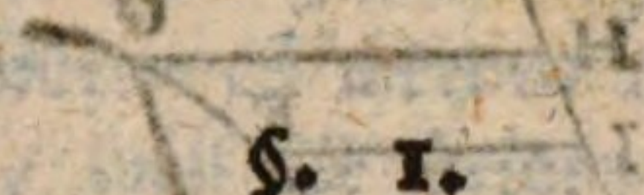
Zweiter Anhang. Von unregulären Linien, Flächen, und Körpern. S. 325

Dritter Anhang. Wiederholung der vornehmsten Lehren der höheren Geometrie. S. 354

Erstes

Erstes Hauptstück.

Von den Kegelschnitten.



§. 1.

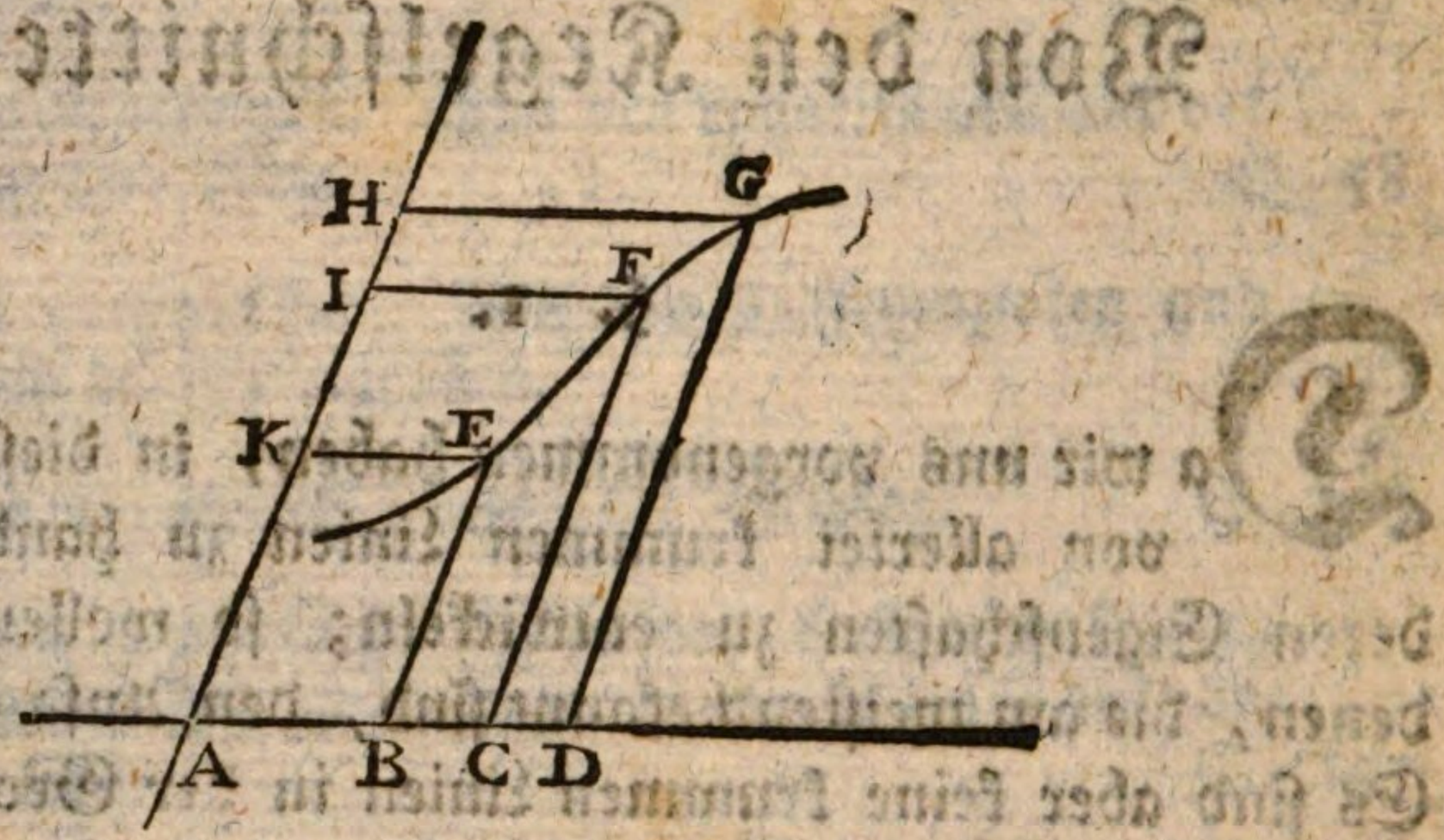
Da wir uns vorgenommen haben, in diesem Werke von allerlei krummen Linien zu handeln, und deren Eigenschaften zu entwickeln; so wollen wir mit denen, die am meisten bekannt sind, den Anfang machen. Es sind aber keine krummen Linien in der Geometrie gebräuchlicher, als die Kegelschnitte, das ist, solche, die da entstehen, wenn man einen Kegel nach verschiedenen Richtungen gerade durchschneidet. Den Kegelschnitten sollen demnach die erstern Hauptstücke des gegenwärtigen Werkes gewidmet seyn. Jedoch wird es nöthig seyn, daß wir vorher einen allgemeinen Begriff von der algebraischen Erklärung der krummen Linien geben.

§. 2.

Eine krumme Linie wird irregulär genannt, wenn kein Gesetz, das ist, keine allgemeine Regel, zu erdenken ist, wornach sie gezeichnet werden kann. So ist, zum Beispiele, ein Zug, den man willkührlich und aus freier Hand auf dem Papiere malet, eine irreguläre Linie; hingegen ist eine krumme Linie regulär, sobald sich eine Regel oder ein Gesetz angeben läßt, wornach alle ihre Punkte bestimmet werden können.

§. 3.

Die Natur einer regulären krummen Linie läßt sich oft durch eine algebraische Gleichung erklären, und dieses geschiehet folgender Weise:

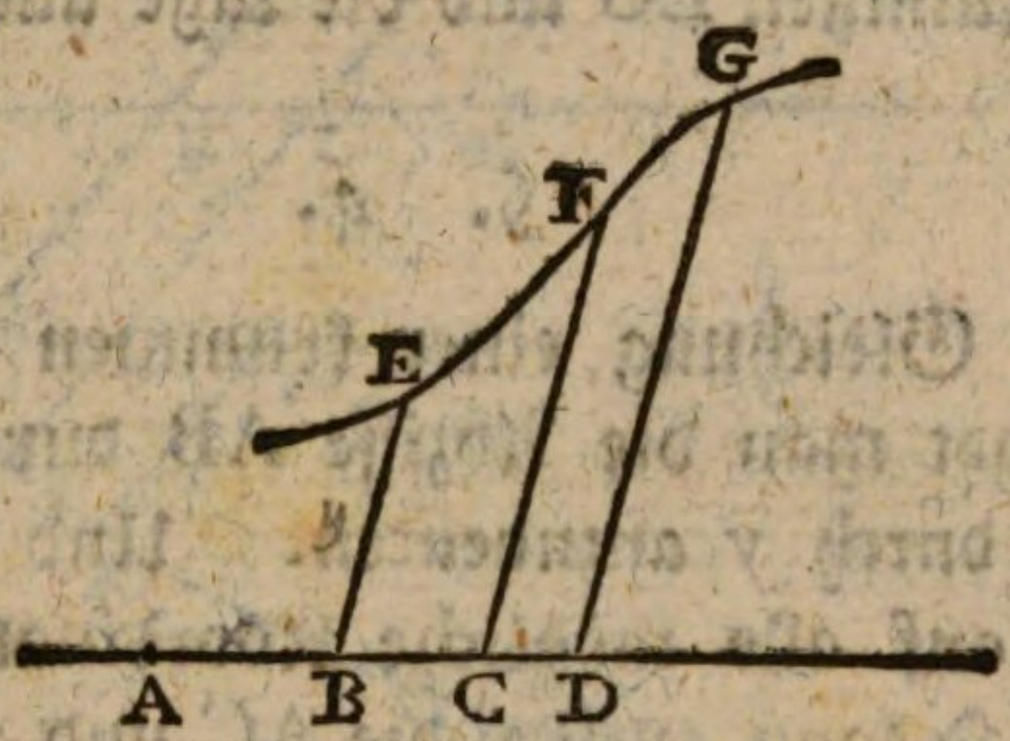


Es sey EG eine krumme Linie. Man wähle willkührlich einen Punkt A. Durch diesen Punkt ziehe man zwei gerade Linien AD, AH, unter einem beliebigen Winkel. Wenn sonst nichts hindert, so pfleget man vorzüglich den rechten Winkel zu wählen, so daß beide Linien AD und AH auf einander senkrecht stehen. Aus verschiedenen Punkten E, F, G der krummen Linie ziehe man bis zu jeder der Linien AD, AH, gerade Linien, mit der andern parallel, so daß lauter Parallelogramme AE, AF, AG entstehen. Die Theile AB, AC, AD, der ersten Linie AD, welche mit KE, IF, HG gleich sind, werden die Abzissen genannt, und müssen von A an, gerechnet werden. Die Theile AK, AI, AH der anderen Linie AH, oder die parallelen Linien BE, CF, DG, werden die Ordinaten oder Applikaten genannt, und müssen auf der zweiten Linie AH vom Punkte A aus, oder auch von der krummen Linie bis zur Linie AD gerechnet werden. Jede Abzisse und die darzu gehörige Applikate, machen ein Paar Koordinaten aus. Z. E. AB und BE, AC und CF, AD

und

und DG, oder auch AB und AK, AC und AI, AD und AH, sind Koordinaten. Der Punkt A ist der Ursprung der Abzissen und Applikaten; die Linien AD, AH, von unbestimmter Länge, sind beide Richtlinien, Direktrißen oder Axen, die eine für die Abzissen, die andere für die Applikaten. Der Winkel HAD ist der Koordinaten-Winkel.

Meistens werden die Parallelogramme nicht vollständig gezeichnet, sondern es werden nur zwei Seiten eines jeden beibehalten, weil die beiden übrigen ihnen gleich sind, wie man in der folgenden Figur siehet.



Hier erscheinen nur die Abzissen AB, AC, AD, samt ihren Applikaten BE, CF, DG. Die Lage derselben bestimmet hinlänglich die Lage der zweiten Richtlinie, welche durch A gehen sollte, und die Abzissen AB, AC, AD sind die nemlichen, als diejenigen, welche aus E, F und G auf die zweite Richtlinie fallen würden. Der Winkel EBD oder FCD ist nichts anders, als der Koordinaten-Winkel, den beide Richtlinien einschließen würden, wenn die zweite angedeutet wäre. Und da hier die zweite Richtlinie nicht sichtbar ist, so muß allemal die erste verstanden werden, wenn bloß von der Richtlinie, Direktrize oder Axe ohne nähere Bestimmung gesprochen wird.

Wenn nun die Lage des Ursprunges und beider Richtlinien bequem gewählet worden, so füget es sich oft, daß

die Beziehung oder das Verhältniß der Koordinaten sich durch eine algebraische Gleichung ausdrücken läßt, welche auf alle mögliche Koordinaten derselben krummen Linie passet; so daß die nemliche Gleichung, welche das Verhältniß zwischen AB und BE ausdrücket, auch das Verhältniß zwischen AC und CF, desgleichen zwischen AD und DG, u. s. f. darstellet. Eine solche Gleichung wird die Gleichung der krummen Linie EG genannt, und giebt den deutlichsten Begriff von ihrer Beschaffenheit. Sie enthält das Gesetz, wornach die Ordinaten BE, CF, DG sich verändern, indem die Abzissen AB, AC, AD allmählig größer werden, und bestimmet also vollkommen den Gang der krummen EG und die Lage aller ihrer Punkte.

§. 4.

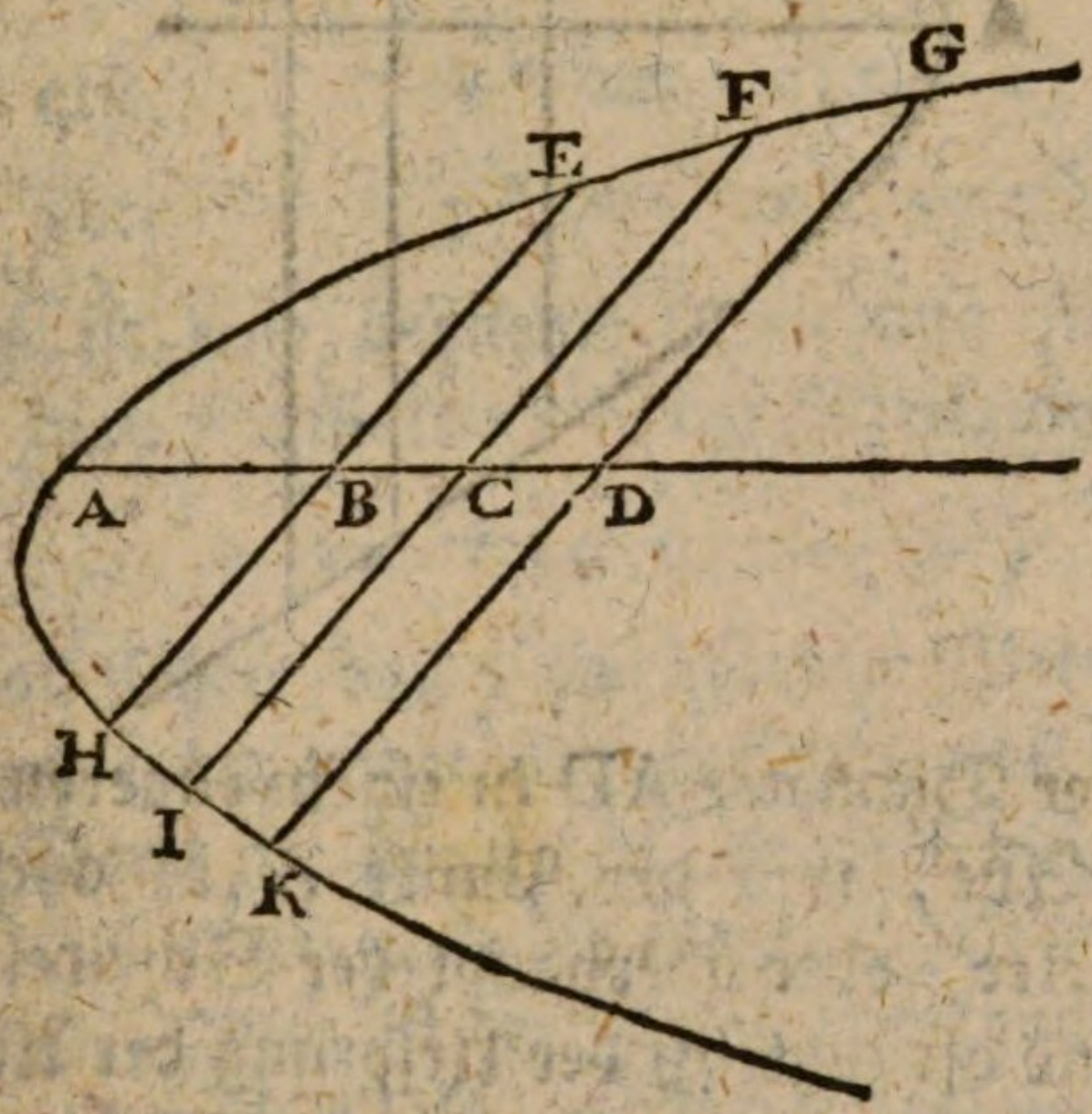
In der Gleichung einer krummen Linie EG (vorige Figur) pfleget man die Abzisse AB durch x und die Applikate BE durch y anzudeuten. Und da die nemliche Gleichung auf alle mögliche Koordinaten der krummen EG passet, so kann auch x die AC und y die CF, oder x die AD und y die DG vorstellen. Da also hier die Größen x und y unendlich viel verschiedene Werthe annehmen können, so werden sie veränderliche Größen genannt. Alle übrigen Größen, die in der Gleichung vorkommen, und die einen einzigen und bestimmten Werth haben, nennet man zum Unterschiede beständige oder unveränderliche Größen, und man pfleget sie mit den ersten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

§. 5.

Manchmal ist eine krumme Linie so beschaffen, daß zu einer Abzisse zwei oder mehrere Applikaten gehören. In diesem Falle giebt es für die nemliche Folge der Abzissen zwei oder mehrere Folgen von Applikaten, welche eben so viel Zweige der krummen Linie anzeigen. Die Gleichung

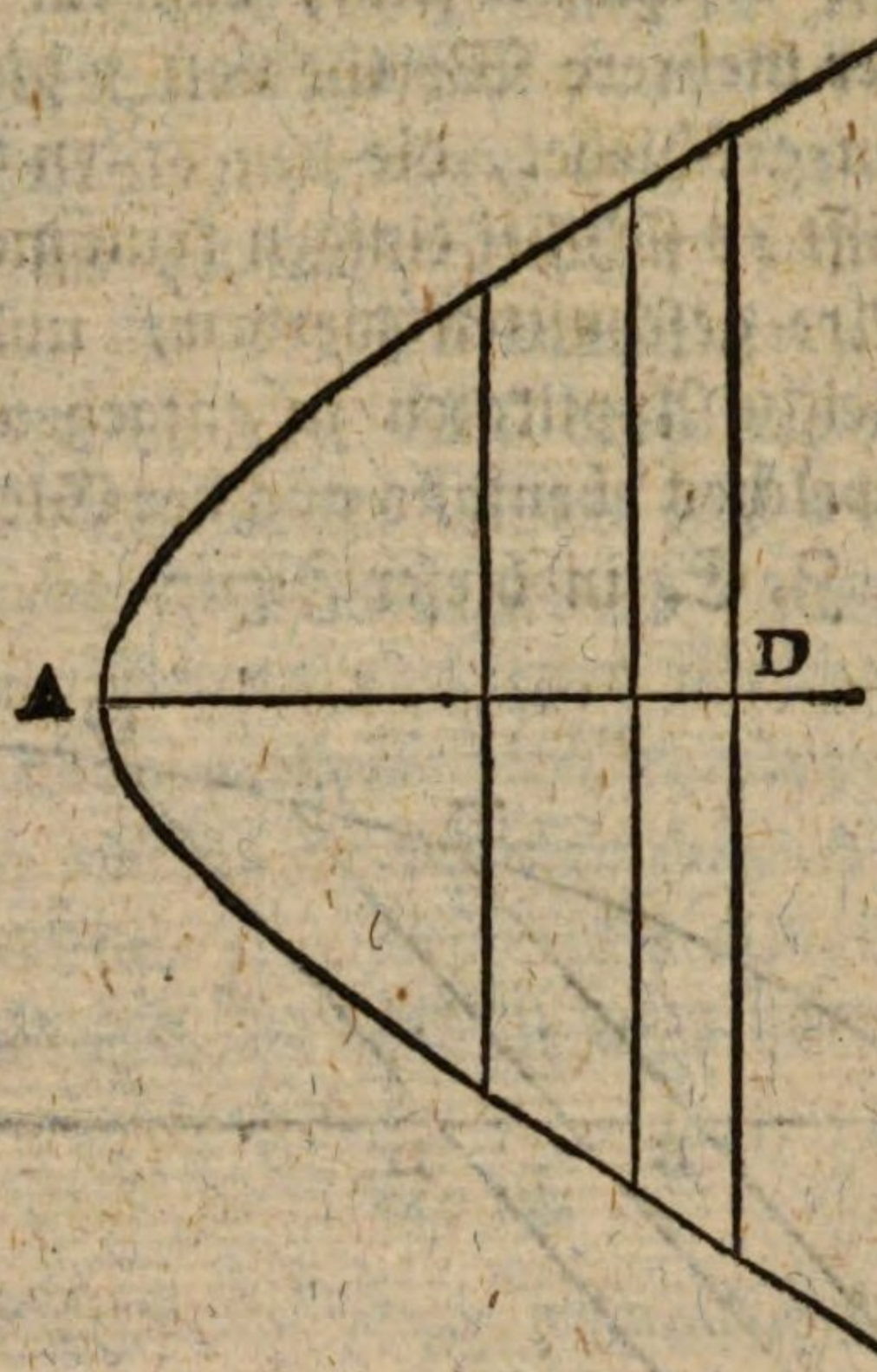
wird

wird alsdann so beschaffen seyn, daß ein einziger Werth von x zwei oder mehrere Werthe von y giebt, wie es oft bei Gleichungen geschiehet, die den ersten Grad übertreffen. Auch trifft es sich bei einigen krummen Linien, daß sie von ihrer Axe geschnitten werden, und daß zu jeder Abzisse zwei gleiche Applikaten in entgegengesetzter Richtung gehören, welches ebenfalls aus der Gleichung erkannt werden muß. Z. E. in dieser Figur



gehören zu den Abzissen AB, AC, AD allemal zwei gleiche Applikaten BE und BH, CF und CI, DG und DK. In diesem Falle wird die Axe AD ein Diameter der krummen Linie genannt. Der Punkt A, wo die Axe von der krummen Linie geschnitten wird, ist der Scheitel des Diameters, und wird gemeiniglich zum Ursprunge der Abzissen angenommen.

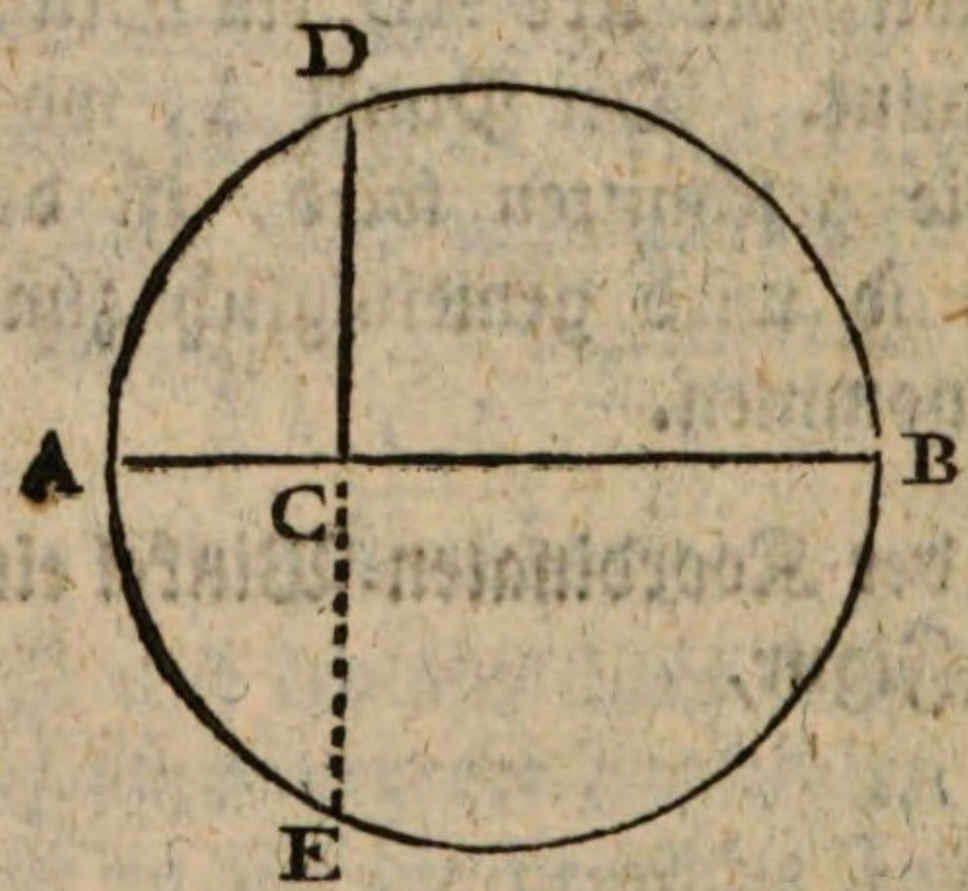
Ist dabei der Koordinaten-Winkel ein rechter, wie in der folgenden Figur,



so bekommt der Diameter AD in einem engeren Verstande den Namen Axe, und der Punkt A ist auch hier der Scheitel der Axe, oder überhaupt der Scheitel der krummen Linie, und oft zugleich der Ursprung der Abzissen.

§. 6.

Um dieses alles deutlicher zu machen, wollen wir den Zirkel zum Beispiele nehmen.



Man nehme den Durchmesser AB zur Direktrisse, und das eine Ende A desselben zum Ursprunge der Abzissen.

Es

Es sey AC eine Abzisse, und CD die dazu gehörige senkrechte Applikate. Es sey $AC = x$, $CD = y$, $AB = a$, folglich $CB = a - x$.

Aus der gemeinen Geometrie ist bekannt, daß CD allemal die mittlere Proporzionallinie ist, zwischen AC und CB, oder daß das Quadrat von CD dem Rektangel aus AC und CB gleich ist. Nemlich es ist

$$CD^2 = AC \times CB$$

also $$y^2 = x(a - x)$$

oder $$y^2 = ax - x^2$$

und dieses ist eine bequeme Gleichung für den Zirkel. Will man bloß y anstatt y^2 in der Gleichung haben, so ist

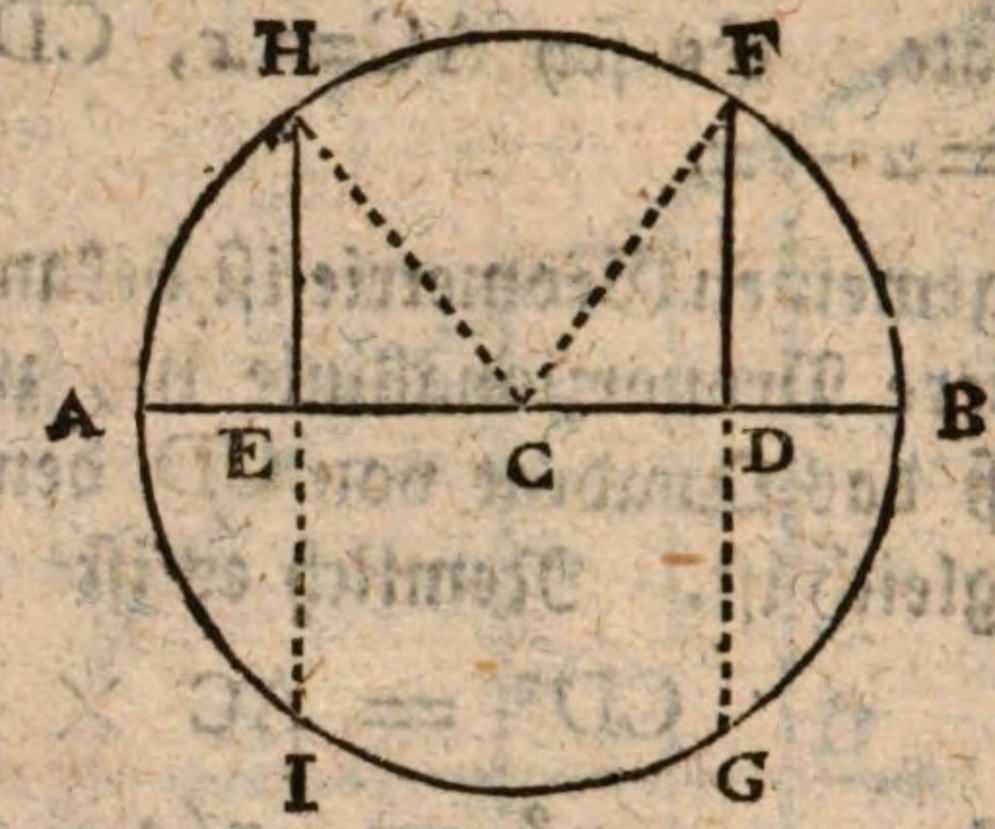
$$y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$$

woraus man siehet, daß y zwei gleiche Werthe hat, einen positiven und einen negativen, welches auch aus der Figur erhellet. Denn zur Abzisse AC gehöret nicht nur die Applikate CD, sondern auch die entgegengesetzte CE, welche ihr gleich ist. Also ist der Zirkel eine krumme Linie, die zwei gleiche Zweige ADB, AEB hat, folglich ist der Diameter AB zugleich die Axe dieser Linie, und der Punkt A ist der Scheitel. Weil aber diese Linie in sich selbst zurückkehret, so hat sie noch einen andern Scheitel B, wo sich die Axe endiget.

Man merke also bei dieser Gelegenheit, daß das Wort Axe noch eine bestimmtere Bedeutung haben kann, als diejenige, welche §. 5. angegeben worden, und bei geschlossenen Linien diejenige Direktrisse anzeiget, welche die krumme Linie in zwei ähnlichgleiche Theile theilet, und von beiden Scheiteln begränzet wird.

§. 7.

Man kann noch eine andere Gleichung für den Zirkel finden.



Man ziehe den Durchmesser AB, und nehme den Mittelpunkt C zum Ursprunge der Abzissen. Es sey CD($=x$) eine Abzisse, und DF ($=y$) die zu derselben gehörige Applikate. Der Halbmesser CB oder CF sey $=r$. So ist, im rechtwinklichen Dreiecke CDF

$$DF^2 = CF^2 - CD^2$$

das ist $$y^2 = r^2 - x^2$$

Diese Gleichung des Zirkels ist in manchen Fällen noch bequemer als die erste. Sie giebt

$$y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

woher man wiederum siehet, daß zu einer Abzisse CD zwei gleiche Applikaten DF und DG gehören.

Ferner kann auch die Abzisse negativ, oder in entgegengesetzter Richtung genommen werden, nemlich $CE = -x$; alsdann bleibet die Gleichung die nemliche, denn man bekömt

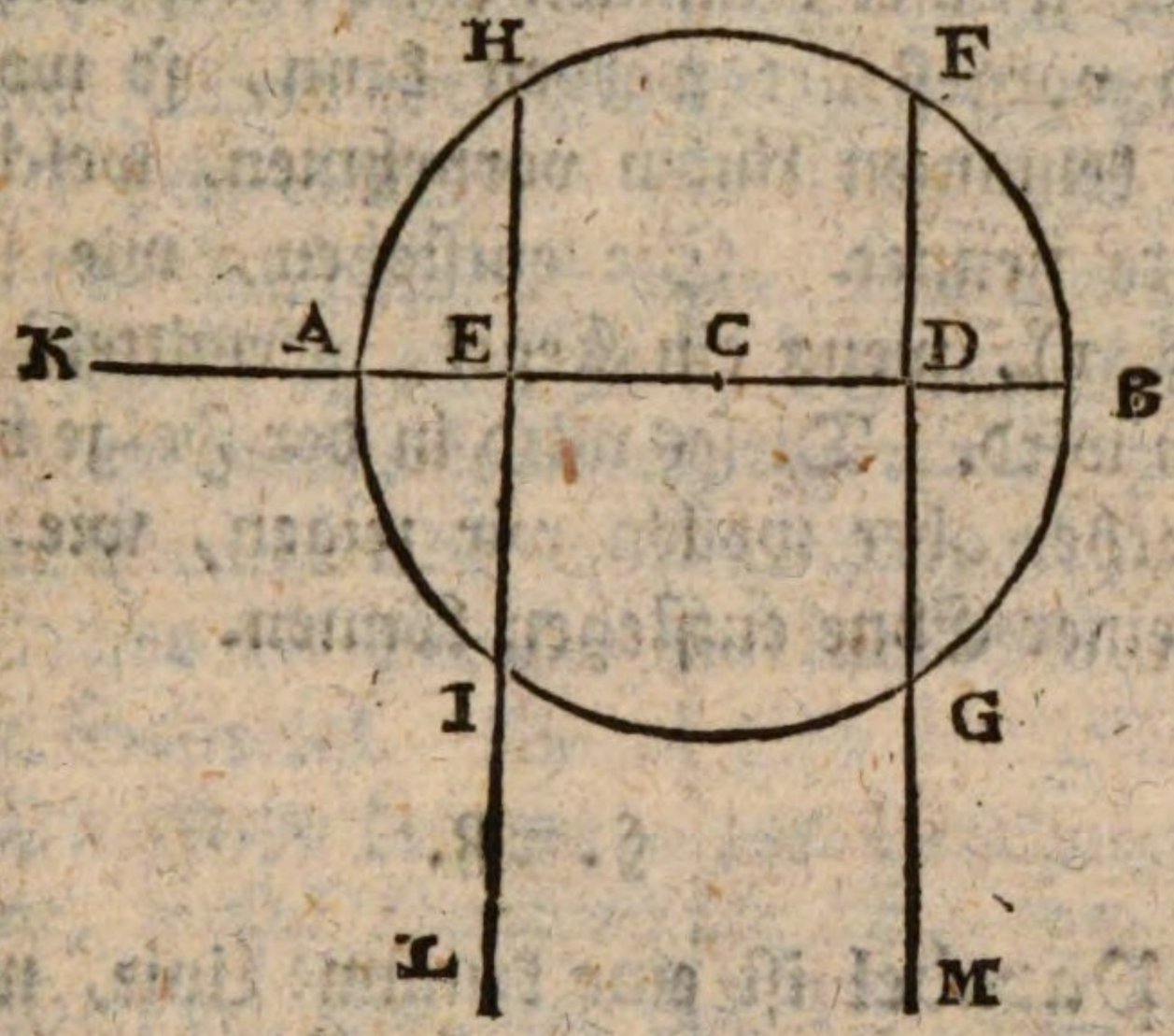
$$y^2 = r^2 - (-x)^2$$

Es ist aber $(-x)^2 = +x^2$, also wiederum

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

woraus man siehet, daß auch zur negativen Abzisse CE zwei gleiche Applikaten gehören, nemlich eine positive EH und eine negative EI.

Anmerkung. Daß von zwei Theilen einer geraden Linie, deren einer diesseits und der andere jenseits eines gewissen Punktes lieget, der eine als positiv und der andere als negativ betrachtet werden müsse, ist leicht einzusehen, wenn man die Größen nicht allein für sich, sondern in Verbindung mit anderen betrachtet.



Es sey $CD = CE = x$, es sey auch $KC = p$. Gesetzt nun, es werde verlanget $p \pm x$, so ist klar, daß $p + x = KC + CD$ und $p - x = KC - CE = KC - CD$. Folglich, wenn CD als positiv angesehen wird, so wird CE eben dadurch negativ; oder, wenn CD zur Vergrösserung einer Linie KC dienet, so dienet CE zur Verkleinerung derselben.

Es sey nun $MD = q$, und es werde verlanget $q \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}$, so ist $MD + DF = q + \sqrt{(r^2 - x^2)}$ und $MD - DG = MD - DF = q - \sqrt{(r^2 - x^2)}$; woraus man wiederum siehet, daß wenn die Applikate DF positiv ist, alsdann die gleiche Applikate DG negativ sey.

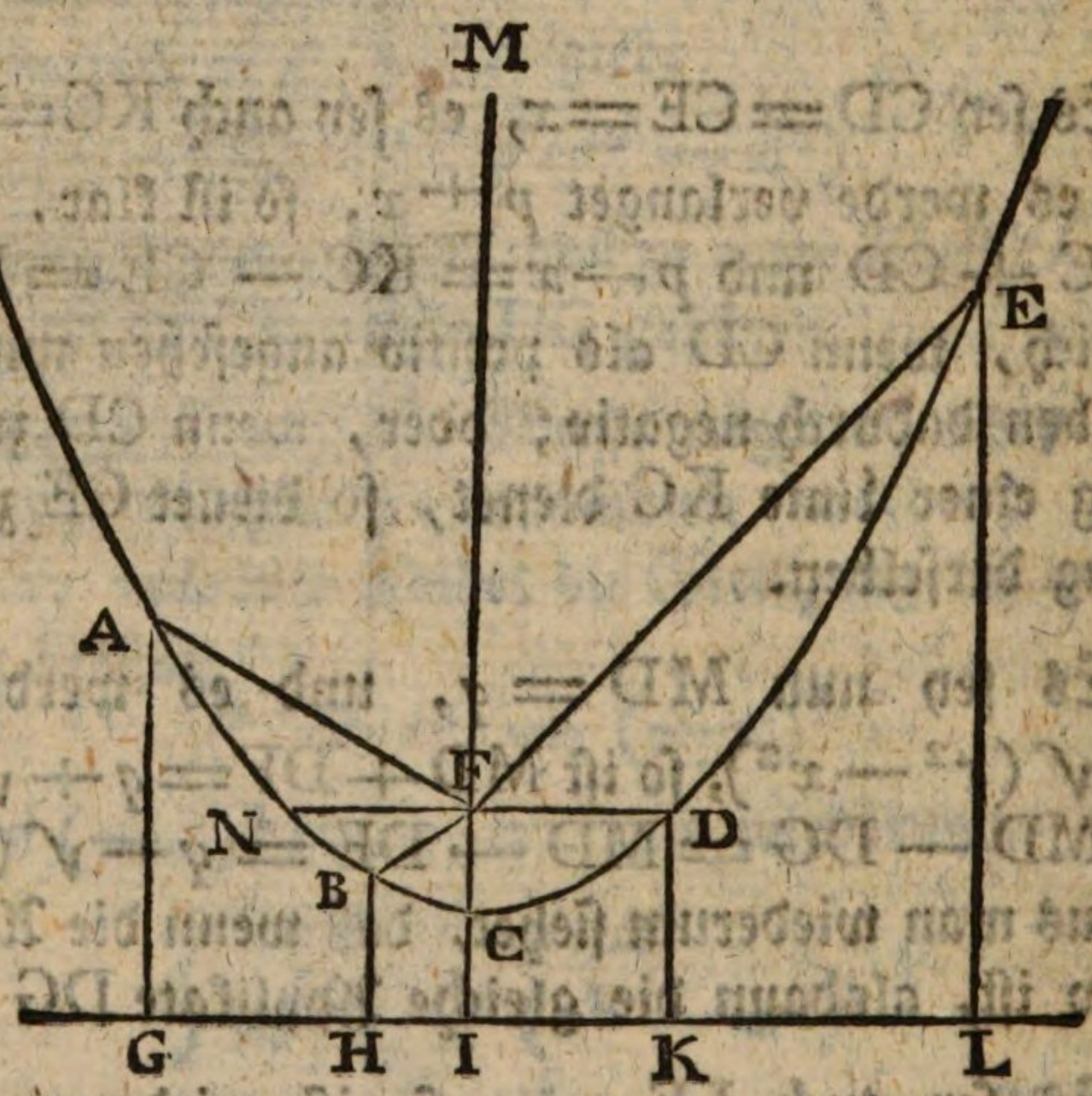
Es sey auch $LE = q$, so ist wiederum $LE + EH = q + \sqrt{(r^2 - x^2)}$, und $LE - EI = q - \sqrt{(r^2 - x^2)}$.

Hier ist also sichtbar, daß eine positive oder negative Größe in der That nichts anders ist, als eine solche, die zur Vermehrung oder Verminderung einer anderen Größe beiträgt, wie wir in unserer Algebra gelehrt haben.

Da wir nun schon am Zirkel gesehen haben, wie die Beschaffenheit einer krummen Linie durch eine algebraische Gleichung vorgestellet werden kann, so wollen wir jezt diejenigen krummen Linien vornehmen, welche man Kegelschnitte nennet. Sie entstehen, wie schon gesaget worden (§. 1), wenn ein Kegel, vermittelst einer Ebne, geschnitten wird. Dieses wird in der Folge bewiesen werden. Vorher aber wollen wir zeigen, wie solche Linien auch auf einer Ebne entstehen können.

§. 8.

Eine Parabel ist eine krumme Linie, wie ABCDE,



welche in Betrachtung einer geraden GL und eines Punktes F so beschaffen ist, daß jeder Punkt der krum-

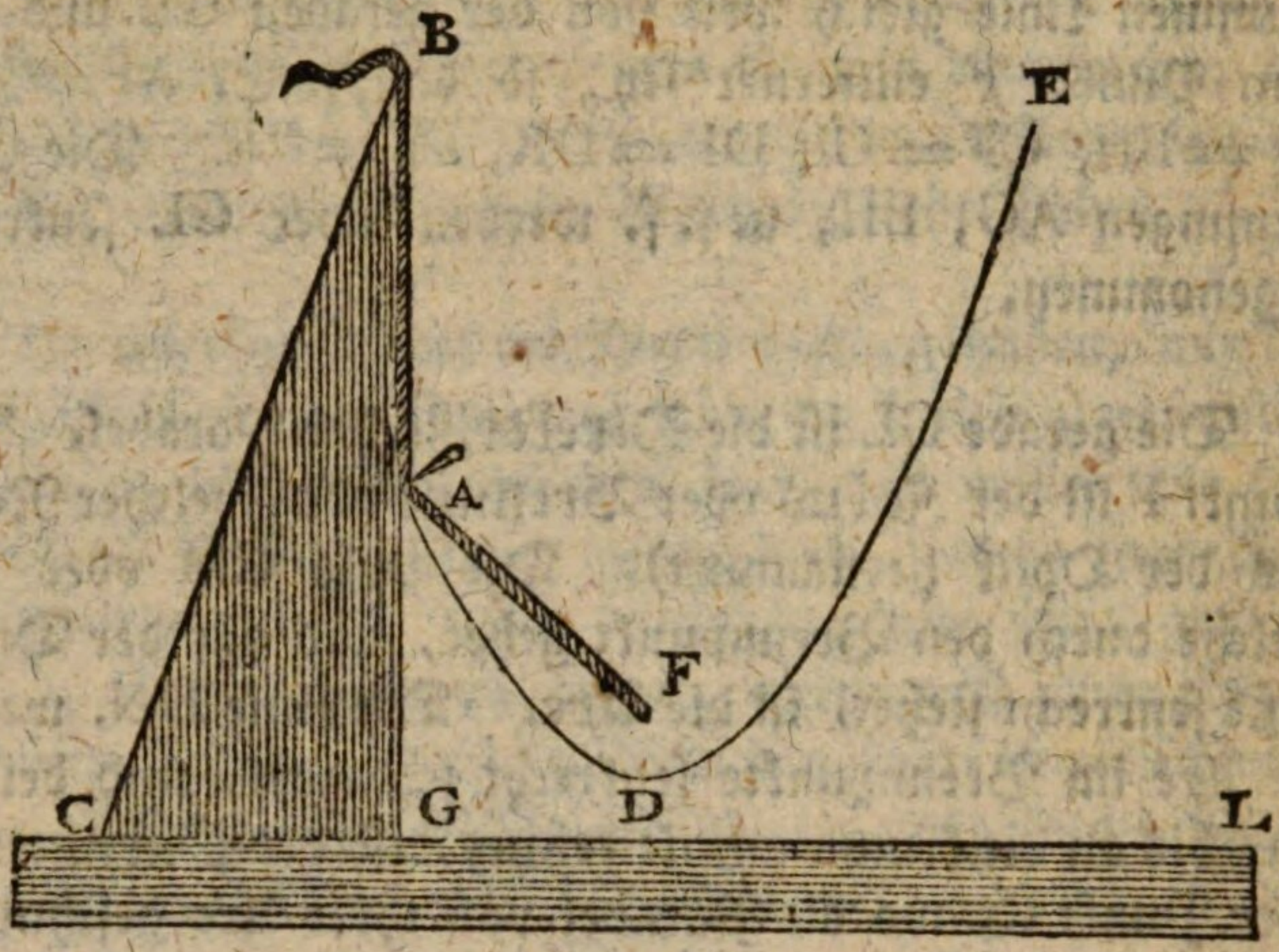
krummen Linie gleich weit von der geraden GL und von dem Punkte F entfernet sey, so daß z. E. AF = AG, BF = BH, CF = CI, DF = DK, EF = EL. Die Entfernungen AG, BH, u. s. f. werden über GL senkrecht angenommen.

Die gerade GL ist die Direktrisse der Parabel. Der Punkt F ist der Fokus oder Brennpunkt (welcher Name aus der Optik herstammet). Die Linie CM oder IM, welche durch den Brennpunkt gehet, und auf der Direktrisse senkrecht stehet, ist die Axe. Die Linie DN, welche die Axe im Brennpunkte senkrecht schneidet, und beiderseits bis an die krumme Linie reichet, ist der Parameter. Der Punkt C, wo die Parabel von ihrer Axe geschnitten wird, ist der Scheitel. Wenn man den Punkt I, wo die Axe der Direktrisse begegnet, zum Ursprunge der Abzissen annimmt, so sind einerseits IK, IL, und anderseits IH, IG die Abzissen, hingegen sind KD, LE, HB, GA die dazu gehörigen Applikaten. Die geraden Linien FA, FN, FB, FC, FD, FE, die vom Brennpunkte bis zum Umfange der krummen Linie gezogen werden, heißen Radii-Vektores. Wir wollen sie kurz die Vektoren nennen.

§. 9.

Wenn man eine Parabel, vermittelst einer stetigen Bewegung, beschreiben will, so kann man folgendermaaßen verfahren.

Siehe die folgende Figur.



Bestimme den Brennpunkt F und die Lage der Direktrisse GL. An der Direktrisse lege ein Lineal CL. Im Punkte F befestige einen Faden FAB. Das andere Ende des Fadens befestige am Ende B eines Winkelhakens oder rechtwinklichen Dreiecks BGC, so daß der ganze Faden FAB die Länge BG bekomme. Halte das Lineal fest an seiner Stelle; rücke aber den Winkelhaken, in der hier vorgestellten Lage, längs dem Lineal, indem du den Faden, vermöge eines Stiftes in A, stramm hältst, und ihn beständig am Winkelhaken andrückest: so beschreibet solcher Stift eine Parabel.

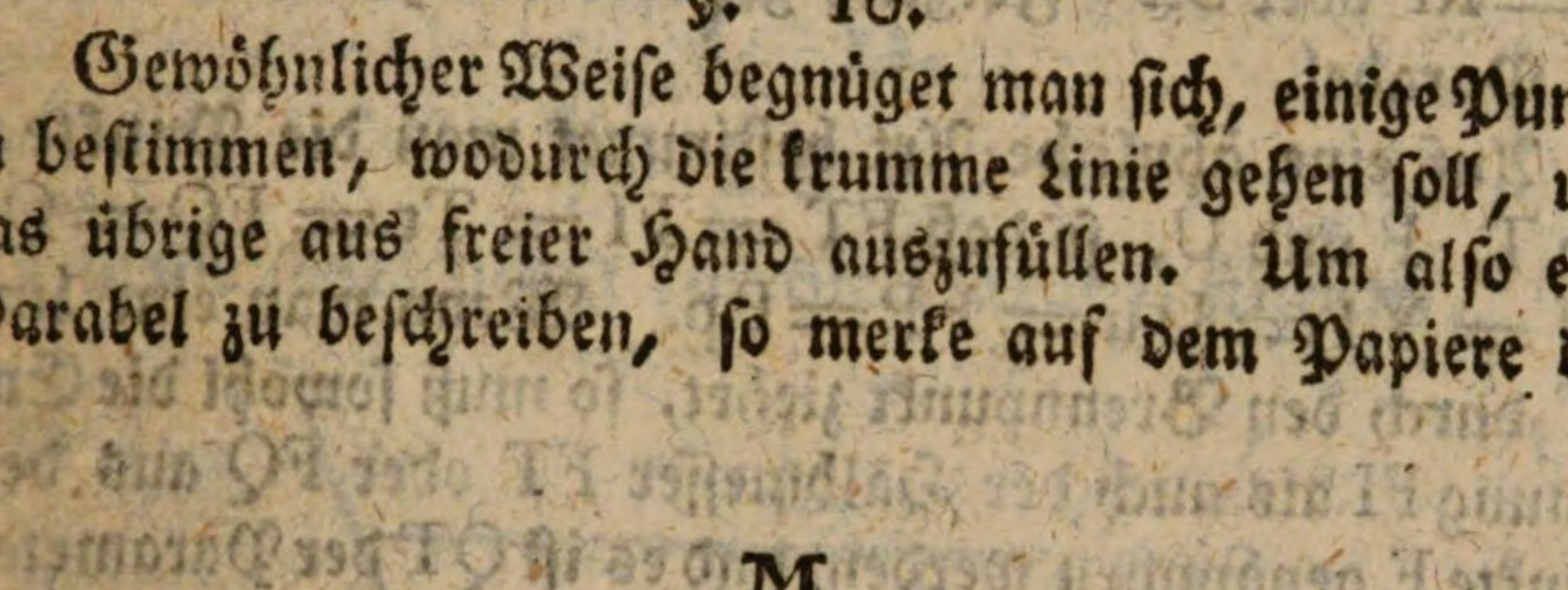
Denn weil der Faden FAB dem Lineale BG gleich ist, so ist, wenn man beiderseits den gleichen Theil AB abnimmt, die Linie FA allemal der AG gleich. Folglich ist, der Erklärung zufolge (§. 8.), die Linie ADE eine Parabel, oder vielmehr ein Theil einer Parabel; weil, wie wir bald sehen werden, die Parabel ohne Ende fortgehen kann, wenn man das Lineal GB und den Faden FAB unendlich groß annimmt.

Die Bequemlichkeit erfordert, daß man erstlich den einen Zweig DA beschreibe, hernach aber den Winkelhaken umkehre, um den anderen Zweig DE zu beschreiben.

Dieses mechanische Verfahren hat die Unbequemlichkeit, daß es schwer ist, einen Faden zu finden, der sich nicht während der Arbeit merklich recke.

§. 10.

Gewöhnlicher Weise begnüget man sich, einige Punkte zu bestimmen, wodurch die krumme Linie gehen soll, und das übrige aus freier Hand auszufüllen. Um also eine Parabel zu beschreiben, so merke auf dem Papiere den



Brennpunkt F und die Direktrize *pu*. Durch den Brennpunkt F ziehe die Axe MI senkrecht auf die Direktrize *pu*.

Halbire FI in D, so gehöret der Punkt D zur Parabel. Denn dieser Punkt ist gleichweit vom Brennpunkte F und von der Direktrize entfernet. Und da dieser Punkt in der Axe lieget, so ist er der Scheitel der Parabel.

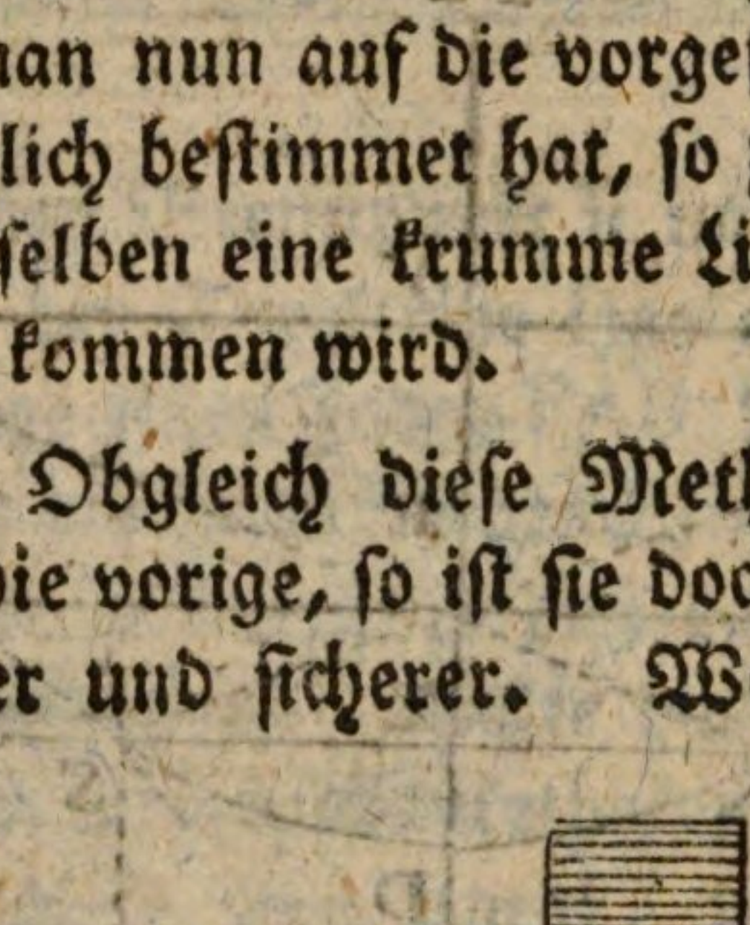
Ziehe nun einige Linien, je mehr je besser, mit der Direktrize parallel, oder auf der Axe senkrecht, als RS, QT, PU, welche die Axe schneiden, in Z, F, Y.

Fasse mit dem Zirkel die Länge ZI, und aus dem Brennpunkte F, mit dem Halbmesser ZI beschreibe Zirkelbogen, welche die RS in R und S schneiden werden. Diese Punkte R und S gehören zur Parabel. Denn, man ziehe Rr, Ss, auf *pu* senkrecht, so ist Rr oder Ss = ZI. Da nun gemacht worden FR oder FS = ZI, so ist FR oder FS = Rr oder Ss. Folglich gehöret der Punkt R oder S zur Parabel.

Auf eine ähnliche Art bestimmet man die Punkte Q und T, P und U, so daß FT = FI = Tt = FQ = Qq, FU = YI = Uu = FP = Pp. Wenn man eine Linie QT durch den Brennpunkt ziehet, so muß sowohl die Entfernung FI als auch der Halbmesser FT oder FQ aus dem Punkte F genommen werden, und es ist QT der Parameter.

Nachdem man nun auf die vorgeschriebene Art so viel Punkte als möglich bestimmet hat, so ziehet man aus freier Hand durch dieselben eine krumme Linie, welche der Parabel sehr nahe kommen wird.

Anmerkung. Obgleich diese Methode unvollständiger scheinet, als die vorige, so ist sie doch in der Ausführung weit bequemer und sicherer. Wer viel Parabeln zu



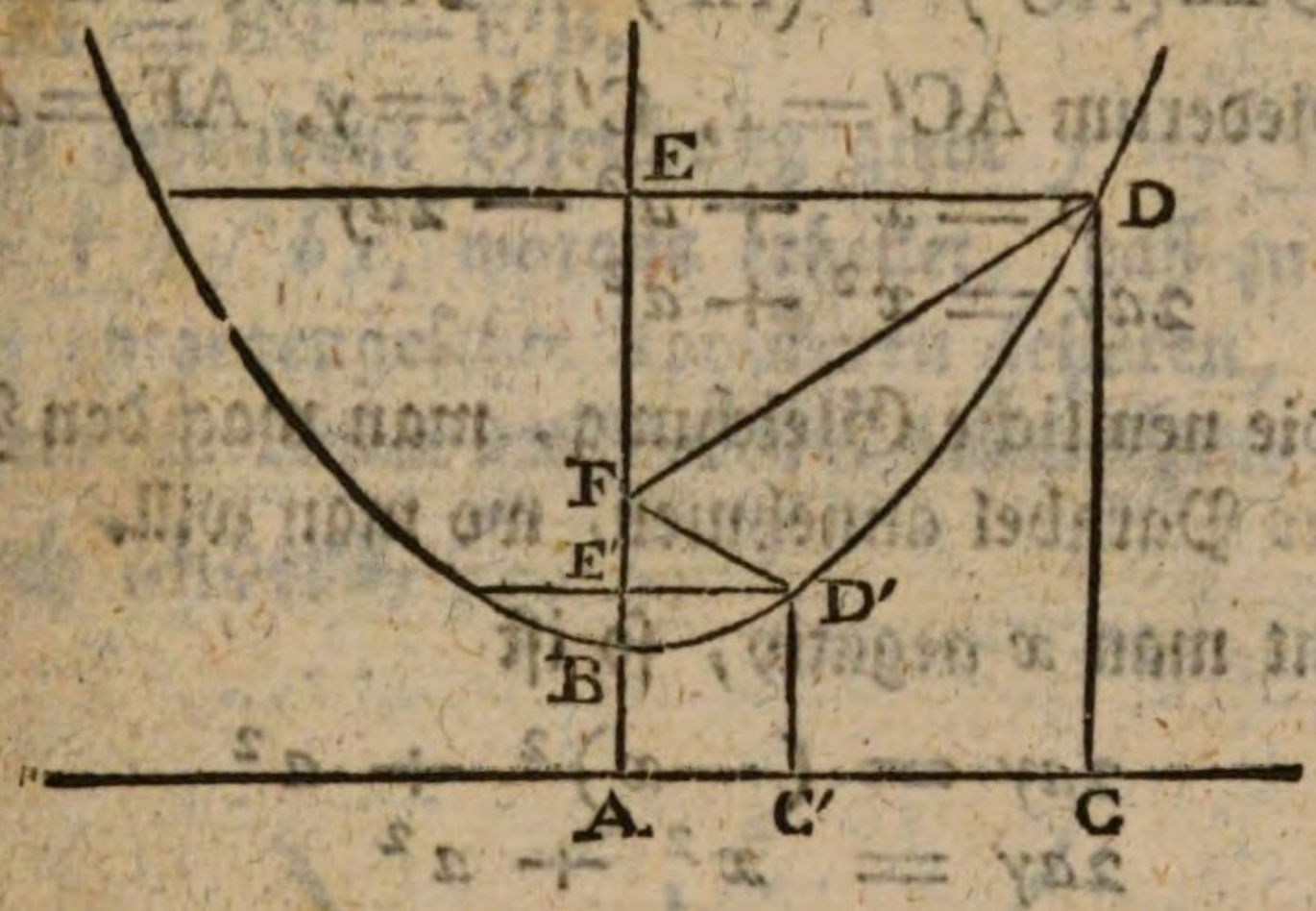
zeich-

zeichnen hat, der mache sich von Pappe oder dickem Papier einige Muster darzu, dergleichen eines hier vorgestellet ist. Es braucht nur einen Zweig der Parabel, nebst der Axe, und dem Brennpunkte zu enthalten; weil alsdann der andere Zweig sehr leicht durch die Umwendung des Musters abgebildet werden kann.

§. 11.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Parabel finden.



Auflösung. Im Dreieck DEF ist

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

Es ist aber $DF = DC$ (§. 8). Es ist auch $DE = AC$. Es ist ferner $EF = EA - FA = DC - FA$. Setzet man diese Werthe in die Gleichung, so ist

$$DC^2 = AC^2 + (DC - FA)^2$$
$$DC^2 = AC^2 + DC^2 - 2FA \times DC + FA^2$$
$$0 = AC^2 - 2FA \times DC + FA^2$$

Es sey $AC = x$, $CD = y$, $FA = a$, so ist

$$0 = x^2 - 2ay + a^2$$

oder $2ay = x^2 + a^2$

das ist, das doppelte Produkt oder Rektangel aus der Applikate CD ($= y$) und der Entfernung FA ($= a$), ist gleich der

der Summe der Quadrate der Abzisse AC($=x$) und der nemlichen Entfernung AF($=a$),

Man nehme den Punkt D', so daß D'E' zwischen F und B falle, so ist wiederum

$$(FD')^2 = (D'E')^2 + (E'F)^2$$

Nun ist wiederum $(FD') = D'C'$, $D'E' = AC'$, $E'F = AF - E'A = AF - C'D'$. Folglich

$$(D'C')^2 = (AC')^2 + (AF - C'D')^2$$
$$(D'C')^2 = (AC')^2 + (AF)^2 - 2AF \times C'D' + (C'D')^2$$
$$0 = (AC')^2 + (AF)^2 - 2AF \times C'D'$$

Ist nun wiederum $AC' = x$, $C'D' = y$, $AF = a$. so ist

$$0 = x^2 + a^2 - 2ay$$
$$2ay = x^2 + a^2$$

Also gilt die nemliche Gleichung, man mag den Punkt D oder D' der Parabel annehmen, wo man will.

Nimmt man x negativ, so ist

$$2ay = (-x)^2 + a^2$$
$$2ay = x^2 + a^2$$

Woraus man siehet, daß linker Hand der Axe ein Zweig der Parabel gehet, der mit dem anderen völlig ähnlich: gleich ist.

Anders. Man nehme die Axe zur Direktrise, und den Scheitel B zum Ursprunge der Abzissen, so ist wiederum

$$DF^2 = DE^2 + EF^2$$

Es ist aber $DF = DC = EA = EB + BA = EB + BF$, und $EF = EB - BF$. Also ist

$$(EB + BF)^2 = DE^2 + (EB - BF)^2$$
$$EB^2 + 2EB \times BF + BF^2 = DE^2 + EB^2 - 2EB \times BF + BF^2$$
$$2EB \times BF = DE^2 - 2EB \times BF$$
$$4EB \times BF = DE^2$$

Es sey nun $BE = x$, $ED = y$, $BF = b$, so ist

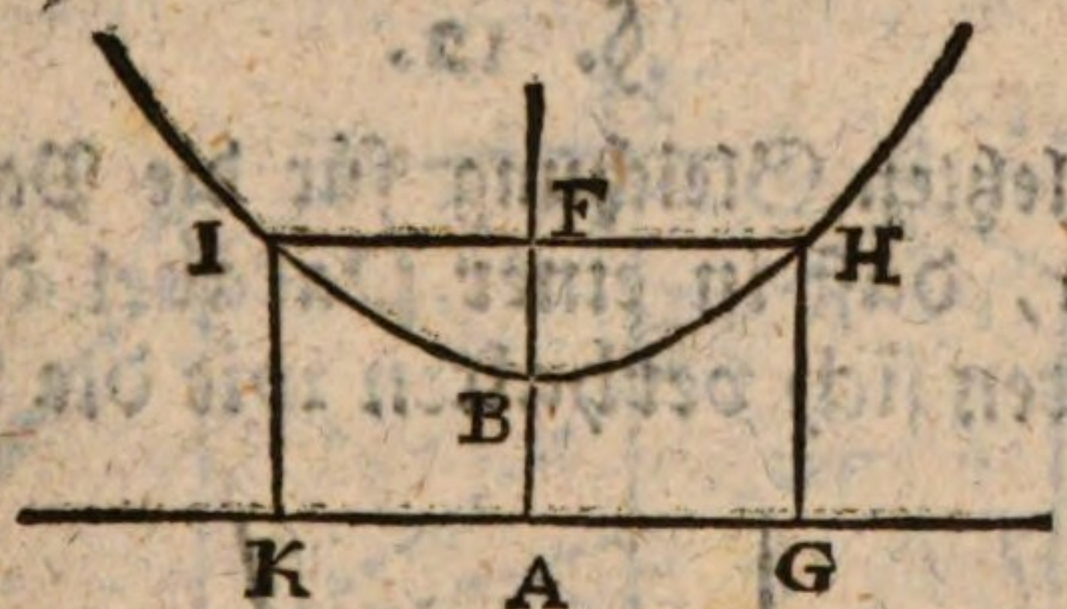
$$4bx = y^2$$

oder $$y^2 = 4bx$$

Das heißt, wenn die Abzissen auf der Axe vom Scheitel an, und die Applikaten auf der Axe senkrecht genommen werden, so ist das Quadrat der Applikate allemal gleich dem Produkte, oder Parallelogramme, aus der Abzisse und der vierfachen Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel. Wird $D'E'$ zwischen F und B genommen, so ist der Beweis der nemliche, ausser daß $E'F$ nicht $= E'B - BF$ sondern $EF = B'F - E'B$.

Diese gefundene Gleichung giebt $y = \pm\sqrt{4bx}$ oder $y = \pm 2\sqrt{bx}$, woraus erhellet, daß zu jeder Abzisse zwei entgegengesetzte Applikaten gehören, welche zusammen eine Ordinate der Parabel ausmachen.

Noch anders.



Es sey I H der Parameter (§. 8.) so ist vermöge der Definizion der Parabel $FH = HG$. Ferner ist im Parallelogramm AH, $HG = FA = 2FB$. Also ist $FH = 2FB$. Eben so ist $FI = IK = FA = 2FB$.

Da nun $FH = 2FB$
und $FI = 2FB$
so ist $FH + FI = 4FB$
oder $IH = 4FB$

das ist, der Parameter ist gleich der vierfachen Entfernung F B. Wenn also F B $=$ b, und I H $=$ p, so ist $p = 4b$. Wir hatten

$$y^2 = 4bx$$

setzet man p anstatt $4b$, so ist

$$y^2 = px$$

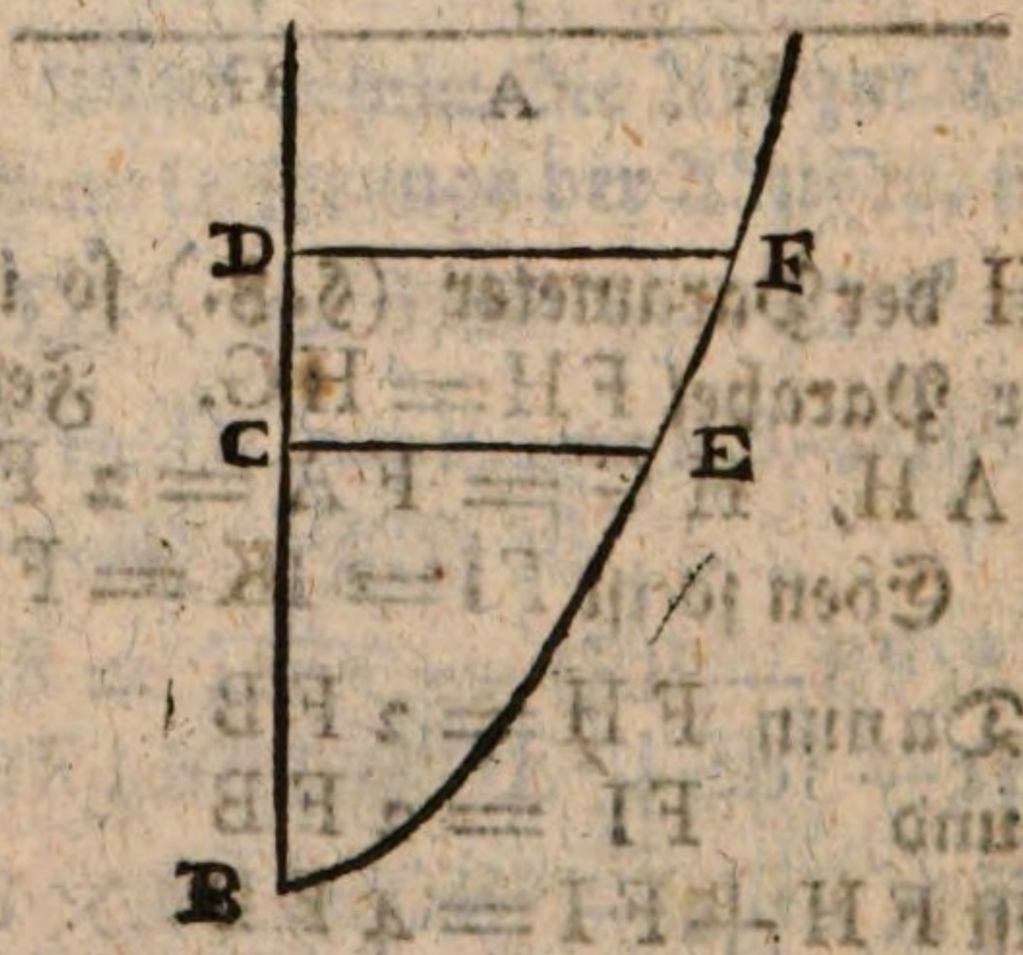
das heißt, das Quadrat der Applikate ist gleich dem Produkte oder Rektangel aus der Abzisse und dem Parameter.

Diese lezte Gleichung ist wegen ihrer Einfachheit die gebräuchlichste.

Anmerkung. Wenn der Parameter p gegeben ist, so kann die Parabel konstruirt oder gezeichnet werden. Denn da I H $=$ 4 F B, so ist F B $=$ A B $=$ $\frac{1}{4}$ I H $=$ $\frac{1}{4}p$. Man hat also die Lage der Direktrize sammt dem Brennpunkte, und die Konstruktion geschiehet wie in §. 9 und §. 10. gelehret worden.

§. 12.

Aus der letzten Gleichung für die Parabel läßt sich leicht beweisen, daß in einer Parabel die Quadrate der Applikaten sich verhalten wie die Abzissen.



Es sey B F einer Parabel, deren Parameter $= p$ ist;

so ist $(CE)^2 = BC \times p$

$(DF)^2 = BD \times p$

folglich

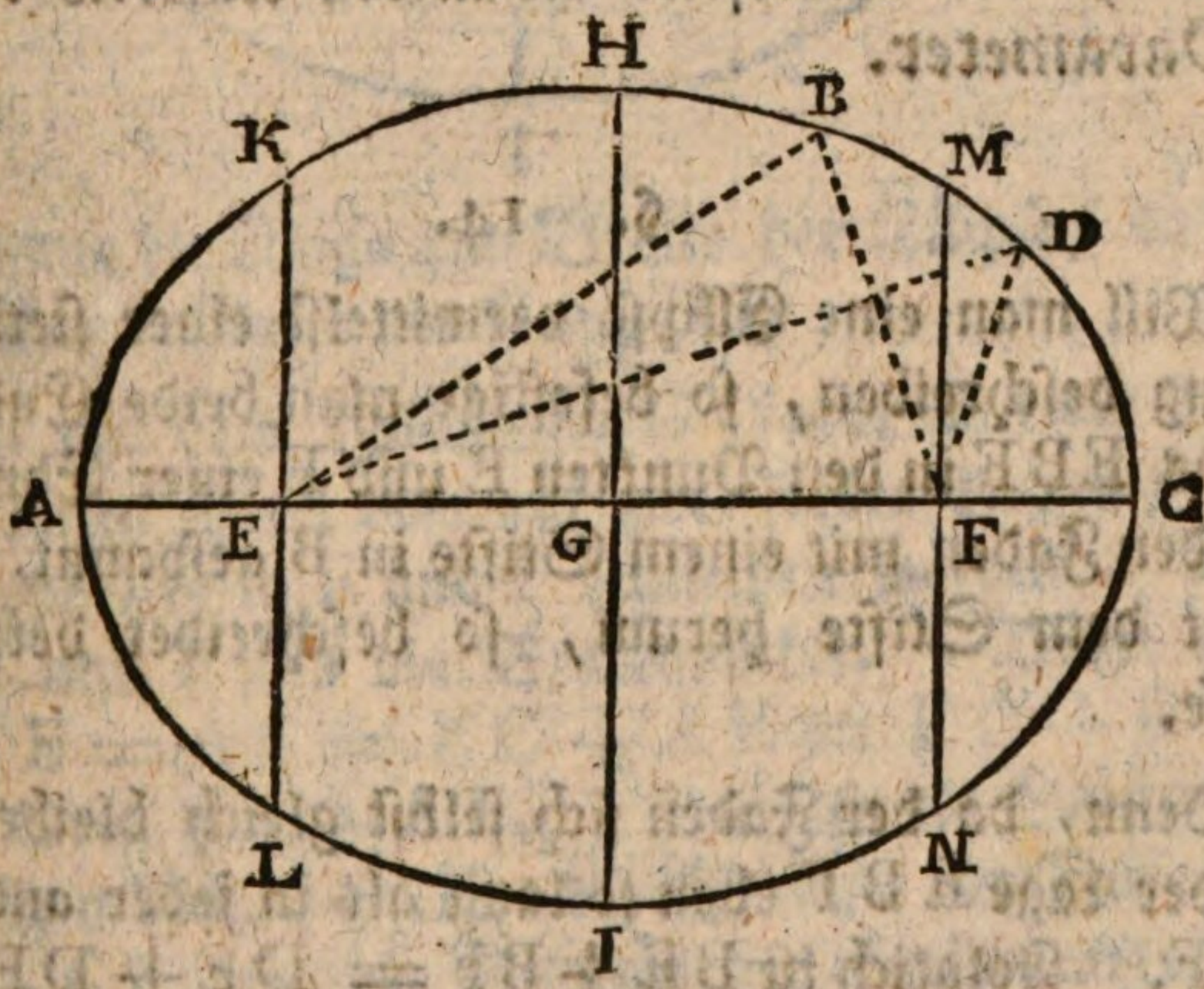
$(CE)^2, (DF)^2 :: BC \times p, BD \times p$

$(CE)^2, (DF)^2 :: BC, BD.$

Anmerkung. Hieraus folget auch, daß die Parabel keine geschlossene Linie ist, sondern daß sie ins unendliche fortgehet, und sich je mehr und mehr von ihrer Axe entfernt. Denn da BC, BD :: $(CE)^2$, $(DF)^2$, so folget, daß BD so groß angenommen werden kann als man will, und daß $(DF)^2$ folglich auch DF immer zunehmen werde, wenn BD zunimmt.

§. 13.

Eine Ellipse ist eine krumme Linie wie ABDC, welche in Betrachtung zweier Punkte E und F so beschrieben ist, daß die Summe beider Entfernungen eines Punktes im Umkreise von den beiden festen Punkten E und F, al-



lemal einerley sey, z. E. daß $BE + BF = DE + DF$.

Die festen oder unverrückten Punkte E und F werden aus optischen Gründen die Brennpunkte genannt.

Die Linien EB, ED, FB, FD, welche von einem Brennpunkte bis zum Umkreise reichen, sind Oektoren. Die gerade Linie A C, welche durch beide Brennpunkte gehet, und beiderseits bis an den Umkreis reichet, ist die große Axe oder Haupt-Axe, oder erste Axe der Ellipse. Die Enden A und C derselben sind die Scheitel der Ellipse. Die Entfernungen E A, E C eines Brennpunkts von beiden Scheiteln wollen wir die Apsiden nennen, (obgleich die Astronomen unter diesem Worte eigentlich die Scheitel selbst verstehen.) Der Punkt G in der Axe welcher in der Mitte zwischen beiden Scheiteln, oder zwischen beiden Brennpunkten liegt, ist der Mittelpunkt der Ellipse. Die Entfernung G E oder G F des Mittelpunktes von jedem Brennpunkte, ist die Ekzentrizität. Die gerade H I, welche die große Axe senkrecht im Mittelpunkte schneidet, und beiderseits bis an den Umkreis reichet, ist die kleine Axe, oder Zwerch-Axe, oder zweite Axe, oder konjugirte Axe. Die gerade Linie K L, oder M N, welche die große Axe im Brennpunkte senkrecht schneidet, und beiderseits bis an den Umkreis reichet, ist der Parameter.

§. 14.

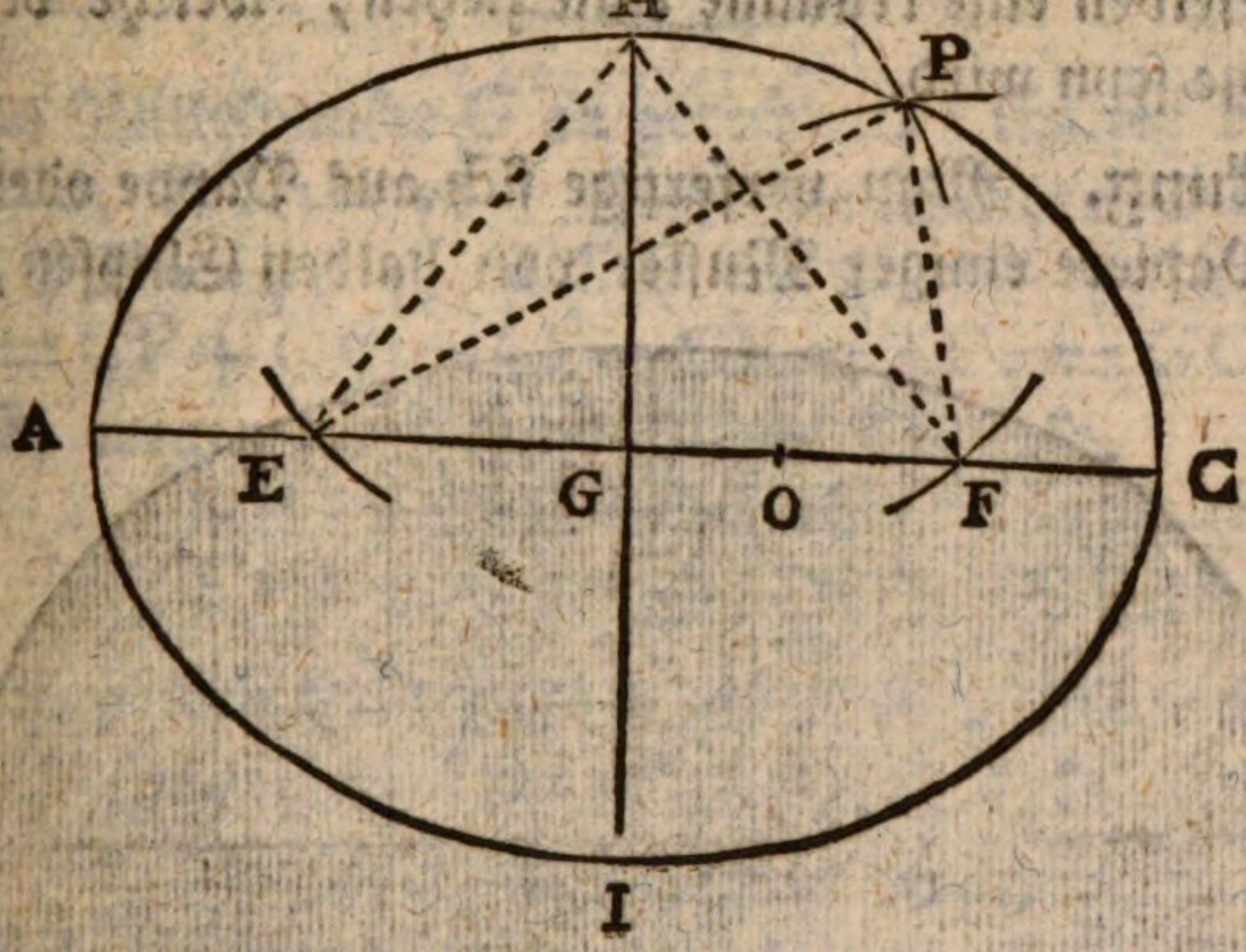
Will man eine Ellipse vermittelst einer stetigen Bewegung beschreiben, so befestige man beide Enden eines Fadens E B F in den Punkten E und F einer Ebne. Man halte den Faden mit einem Stifte in B gespannt, und fahre mit dem Stifte herum, so beschreibet derselbe die Ellipse.

Denn, da der Faden sich selbst gleich bleibet, so ist er in der Lage E B F eben so lang als in jeder andern Lage E D F. Folglich ist $BE + BF = DE + DF$. Aus dieser Beschreibung der Ellipse und vorigen Definizionen ist leicht einzusehen: 1) daß die Ellipse sowohl durch die große als durch die kleine Axe in zwey ähnlichgleiche

Theile geschnitten wird, 2) daß $CF = AE$, 3) daß die Summe zweier Vektoren allemal der großen Axe gleich ist. Denn es ist nothwendig $EB + BF = EC + CF$, weil EC und CF als die beiden Vektoren für den Punkt C betrachtet werden müssen. Nun ist $EC + CF = EC + AE = AC$.

§. 15.

Will man blos einige Punkte der Ellipse bestimmen, so muß man folgendermaaßen verfahren.



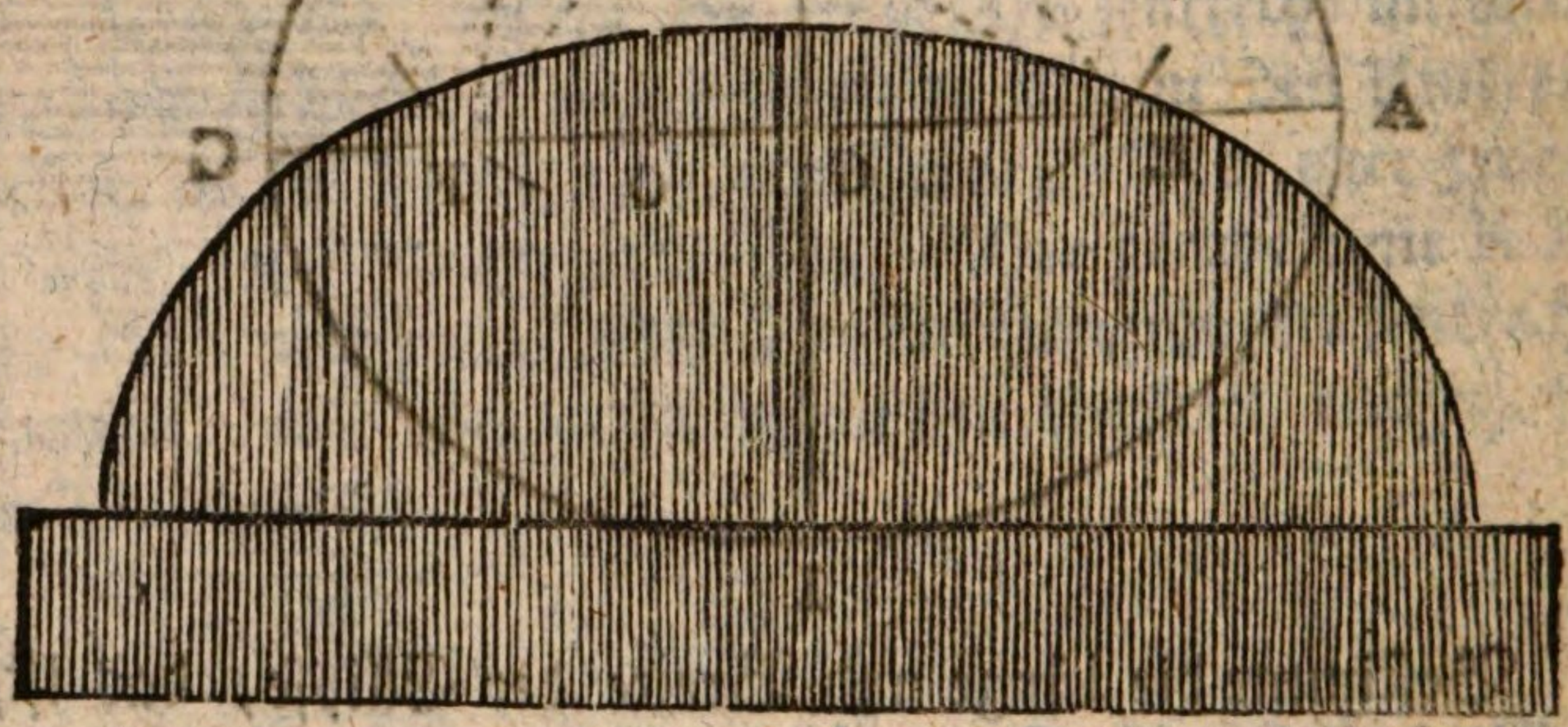
Bestimme die Länge und Breite der Ellipse, das ist, die große Axe AC und die kleine HI.

Aus H mit dem Halbmesser GC oder $GA = \frac{1}{2} AC$ beschreibe einen Zirkel oder nur zwei kleine Bogen, welche die große Axe in E und F schneiden werden. Diese Punkte E und F sind die Brennpunkte. Denn es ist $HF + HE = AC = EC + AE = EC + CF = FA + FC = FA + AE$. Da also die Summe der Entfernungen $HE + HF$, der Summe der Entfernungen $CE + CF$, und der Summe der Entfernungen $AF + AE$ gleich ist, so gehören die Punkte A, H, C zu einer Ellipse, deren Brennpunkte in E und F sind.

Nimm nun einen Punkt O auf der großen Axe. Aus E mit dem Halbmesser AO, beschreibe einen Zirkelbogen in P. Aus F mit dem Halbmesser CO beschreibe einen andern Bogen der den vorigen in P schneide. So gehöret der Punkt P zur Ellipse. Denn es ist $EP + PF = AO + OC = AC$ Es war auch $HE + HF = AC$, $CE + CF = AC$, $AF + AE = AC$. Also gehöret der Punkt P zur nemlichen Ellipse die durch die Punkte A, H, C gehet.

Nachdem nun auf solche Art mehrere Punkte der Ellipse bestimmet worden, so kann man aus freier Hand durch dieselben eine krumme Linie ziehen, welche beinahe die Ellipse seyn wird.

Anmerkung. Man verfertige sich aus Pappe oder starkem Papiere einiger Muster von halben Ellipsen, der-



gleichen hier eines vorgestellet wird, um dieselben bey Gelegenheit zu gebrauchen, wie schon bei der Parabel gerathen worden.

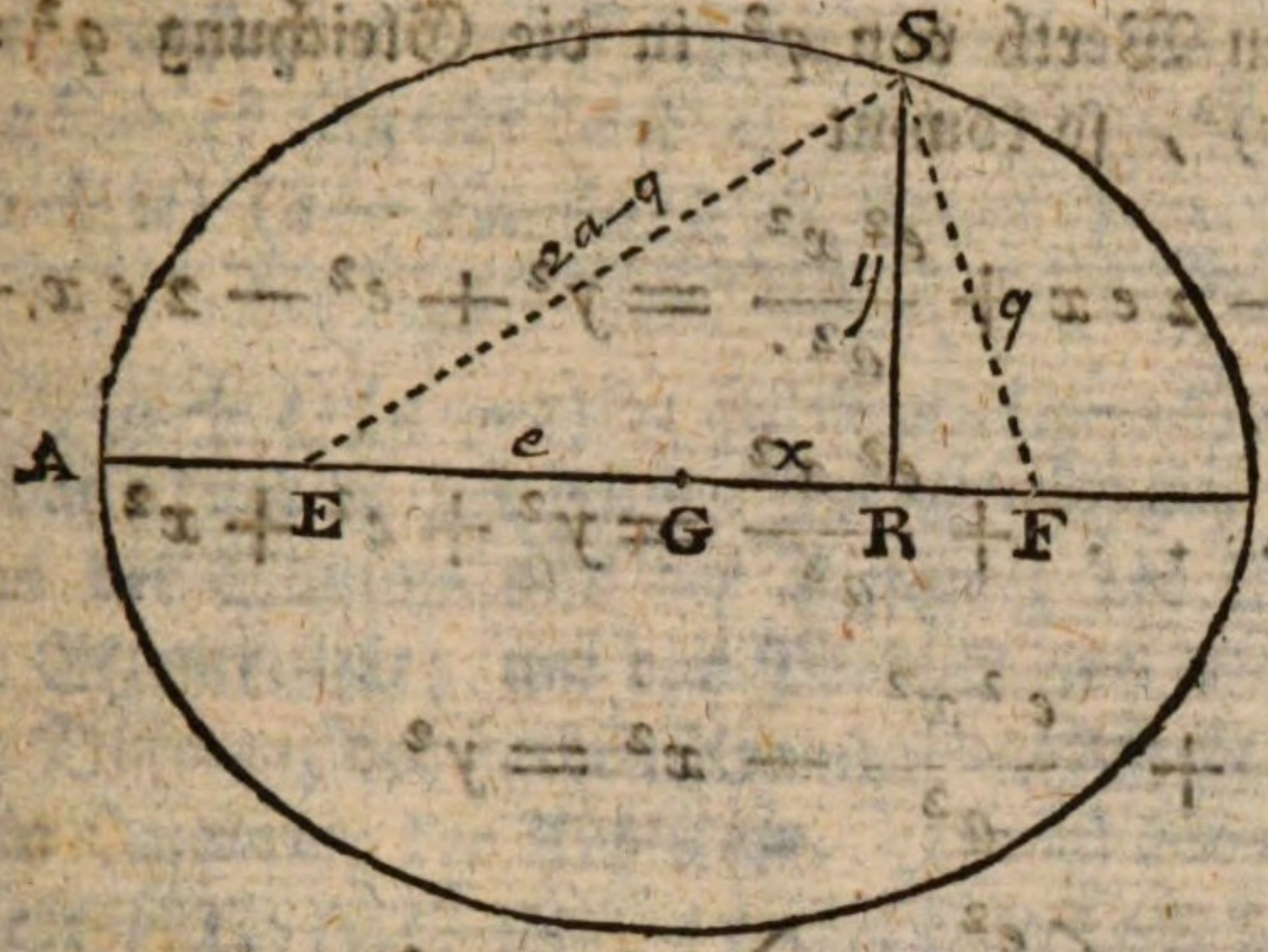
§. 16.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse finden, wenn die halbe Haupt-Axe und die Ekzentrizität als bekannt angenommen werden.

Auflösung. Gesetzt, es werden als bekannt angenommen, die halbe große Axe $GC = GA = a$, und die Ekzentrizität $GF = GE = e$, und die Abzissen wer-

den



den vom Mittelpunkte G an gerechnet. Es sey demnach $GR = x$, $RS = y$. Ziehe die Vektoren SE, SF. Es sey $SF = q$, so ist $SE = 2a - q$, weil $SF + SE = CF + CE = AE + CE = AC = 2GC = 2a$.

Nun ist, wegen der rechtwinklichen Dreiecke,

$$SE^2 = SR^2 + ER^2$$
$$SF^2 = SR^2 + RF^2$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$(2a - q)^2 = y^2 + (e + x)^2$$
$$q^2 = y^2 + (e - x)^2$$

Die erste Gleichung giebt

$$4a^2 - 4aq + q^2 = y^2 + (e + x)^2$$

Ziehe ab $q^2 = y^2 + (e - x)^2$

Bleibet $4a^2 - 4aq = (e + x)^2 - (e - x)^2$

$$4a^2 - 4aq = e^2 + 2ex + x^2 - e^2 + 2ex - x^2$$
$$4a^2 - 4aq = 4ex$$
$$a^2 - aq = ex$$
$$a^2 - ex = aq$$
$$a - \frac{ex}{a} = q$$
$$a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} = q^2$$

Setze diesen Werth von q^2 in die Gleichung $q^2 = y^2 + (e - x)^2$, so kömmt

$$a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} = y^2 + e^2 - 2ex + x^2$$

$$a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} = y^2 + e^2 + x^2$$

$$a^2 - e^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 = y^2$$

$$a^2 - e^2 + \left(\frac{e^2}{a^2} - 1\right) x^2 = y^2$$

$$(a^2 - e^2) + \left(\frac{e^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 = y^2$$

$$(a^2 - e^2) - \left(\frac{a^2 - e^2}{a^2}\right) x^2 = y^2$$

$$a^2(a^2 - e^2) - (a^2 - e^2)\, x^2 = a^2 y^2$$

$$(a^2 - x^2) \times (a^2 - e^2) = a^2 y^2$$

$$\frac{(a^2 - x^2)(a^2 - e^2)}{a^2} = y^2$$

das heißt, das Quadrat der Applikate, ist gleich der Differenz der Quadrate der halben Axe und der Abzisse, multipliziret mit der Differenz der Quadrate der halben Axe und der Ekzentrizität, dividiret durch das Quadrat der halben Haupt-Axe.

Oder, das Quadrat der Applikate ist die vierte Proporzionalgrösse, zum Quadrate der halben Haupt-Axe, zur Differenz der Quadrate der halben Axe und der Abzisse, und zur Differenz der Quadrate der halben Axe und der Ekzentrizität.

Oder, anstatt $a^2 - x^2$ schreibe $(a+x)(a-x)$, und anstatt $a^2 - e^2$ schreibe $(a+e)\ (a-e)$, so hast du

$$\frac{(a+x)\ (a-x).\ (a+e)\ (a-e)}{a^2} = y^2$$

daher $a^2, (a+e)(a-e) :: (a+x)\ (a-x),\ y^2$; das heißt, das Quadrat der halben Axe verhält sich zum Produkt aus der Summe und der Differenz der halben Axe und der Ekzentrizität; wie das Produkt aus der Summe und der Differenz der halben Axe und der Abzisse, sich verhält zum Quadrate der Applikate. Es ist demnach

$GC^2, (GC+EG)\ (GC-EG) :: (AG+GR)\ (AG-GR), SR^2$

oder $GC^2, (EC \times AE) :: (AR \times RC),\ SR^2$

das heißt, das Quadrat der halben Axe verhält sich zum Rektangel aus beiden Apsiden, wie das Rektangel aus beiden abgeschnittenen Theilen der Axe, zum Quadrate der Applikate.

Anders. Das letzt gefundene Verhältniß führet uns auf eine andere bequeme Gleichung. Es sey die ganze Axe $AC = g$, die Apside $AE = h$, so ist $EC = g - h$. Es sey $AR = x$, so ist $RC = g - x$. Es sey endlich $RS = y$, so ist

$$(\tfrac{1}{2}g)^2,\ h(g-h) :: x(g-x),\ y^2$$

$$y^2 = \frac{h(g-h).\ x(g-x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

Zusatz I. Wenn wir in der letzt gefundenen Gleichung annehmen, es werde $x = \frac{1}{2}g$, so wird die Applikate zur halben kleinen Axe. Es sey demnach diese halbe kleine Axe $= b$, so bekömmt man

$$b^2 = \frac{h(g-h).\ \frac{1}{2}g(g-\frac{1}{2}g)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

$$b^2 = \frac{h(g-h).\ (\frac{1}{2}g)^2}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

$$b^2 = h(g-h)$$

Das heißt, das Quadrat der halben kleinen Axe ist gleich dem Rektangel aus beiden Apsiden, oder, die halbe kleine Axe ist die mittlere Proporzial-Linie zwischen beiden Apsiden.

Zusatz II. Gesetzt, es werde in der nemlichen Gleichung $x = h$, so wird y zum halben Parameter; dieser halbe Parameter sey p, so ist, wenn $x = h$

$$p^2 = \frac{h(g-h) \cdot h(g-h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

das heißt, das Rektangel aus beiden Apsiden ist die mittlere Proporzional-Größe zwischen dem Quadrate der halben großen Axe, und dem Quadrate des halben Parameters. Aus der nemlichen Gleichung ist $p = \frac{h(g-h)}{\frac{1}{2}g}$ oder $p.(\frac{1}{2}g) = h.(g-h)$

das heißt, das Rektangel aus dem halben Parameter und der halben großen Axe ist gleich dem Rektangel aus beiden Apsiden.

Zusatz III. Die kleine Axe ist die mittlere Proporzional-Linie zwischen der großen Axe und dem Parameter. Denn es ist

$$(\tfrac{1}{2}g)^2 = (\tfrac{1}{2}g)^2$$
$$b^2 = h(g-h)$$
$$p^2 = \frac{h(g-h) \cdot h(g-h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

wo $\frac{1}{2}g$ die halbe große Axe, b die halbe kleine Axe, und p der halbe Parameter ist, Suche zu $(\frac{1}{2}g)^2$ und $h(h-g)$ die dritte Proportionalgrösse, so ist dieselbe $\frac{h(g-h) \cdot h(g-h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$ das ist p^2. Folglich ist

$$\therefore (\tfrac{1}{2}g)^2, b^2, p^2$$

Daher $\therefore \frac{1}{2}g, b, p.$

Zus

Zusatz IV. Gesetzt es sey die Haupt-Axe und der Parameter gegeben, und es solle die Ellipse gezeichnet werden, so suche man zwischen der Haupt-Axe und dem Parameter die mittlere Proporzionallinie, um die zweite Axe zu bekommen. Dann verfahre man wie im §. 15. gelehret worden.

§. 17.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse finden, wenn die große und kleine Axe als bekannt angenommen werden.

Auflösung. Nimmt man den Mittelpunkt zum Ursprunge der Abzissen, und die Abzissen auf der großen Axe, so war in der ersten Auflösung des vorigen Paragraphs gefunden worden

$$y^2 = \frac{(a+x)(a-x).\ (a+e)(a-e)}{a^2}$$

Es war aber $(a+e)(a-e)$ das Rektangel aus beiden Apsiden. An dessen Stelle kann aber das Quadrat der halben kleinen Axe gesetzet werden (§. 16. Zusatz I.). Die halbe kleine sey b, so ist

$$y^2 = \frac{(a+x)(a-x) \times b^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a+x)(a-x)$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

und dieses ist eine bequeme Gleichung, worin a und b die Hälften beider Axen vorstellen, die Abzissen aber vom Mittelpunkte aus auf der großen Axe genommen werden.

Anders. Will man die Abzissen vom Scheitel an rechnen, so erinnere man sich der zweiten Auflösung des vorigen Paragraphs. Es war nemlich

$$y^2 = \frac{h(g-h).x(g-x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

Hier ist nun wiederum $h(g-h)$ das Rektangel aus beiden Apsiden, welches also dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich ist. Es sey die kleine Axe k, so ist demnach

$$y^2 = \frac{(\frac{1}{2}k)^2.\ x(g-x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

$$y^2 = \frac{\frac{1}{4}k^2.\ x(g-x)}{\frac{1}{4}g^2}$$

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}\ x(g-x)$$

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}\ (gx - x^2)$$

Hier sind k und g die beiden ganzen Axen.

§. 18.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse finden, wenn die große Axe und der Parameter als bekannt angenommen werden.

Auflösung. Wenn die halben Axen a und b sind, und die Abzissen im Mittelpunkte anfangen, so war

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\ (a+x)(a-x)$$

Der halbe Parameter ist die dritte Proporzionallinie zu a und b, also ist $p = \frac{b^2}{a}$ und $b^2 = ap$. Setzet man

ap

ap anstatt b^2, so ist

$$y^2 = \frac{ap}{a^2}(a+x)\ (a-x)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}(a+x)\ (a-x)$$

oder $$y^2 = \frac{p}{a}(a^2 - x^2)$$

Anders. Wenn die große Axe g, die kleine k ist, und die Abzissen vom Scheitel aus genommen werden, so war $$y^2 = \frac{k^2}{g^2}x(g-x)$$

Weil y die große und k die kleine Axe ist, so ist, wenn wir den Parameter mit n benennen, $g, k :: k, n$,

also $n = \frac{k^2}{g}$ und $k^2 = g\,n$, daher

$$y^2 = \frac{g\,n}{g^2}.x(g-x)$$

$$y^2 = \frac{n}{g}.x(g-x)$$

oder $$g.y^2 = n.x(g-x)$$

das heißt, das Rektangel aus beiden Abzissen verhält sich zum Quadrate der Applikate, wie die große Axe zum Parameter. Diese Gleichung kann auch also ausgedrücket werden,

$$g\,y^2 = n\,g\,x - n\,x^2$$

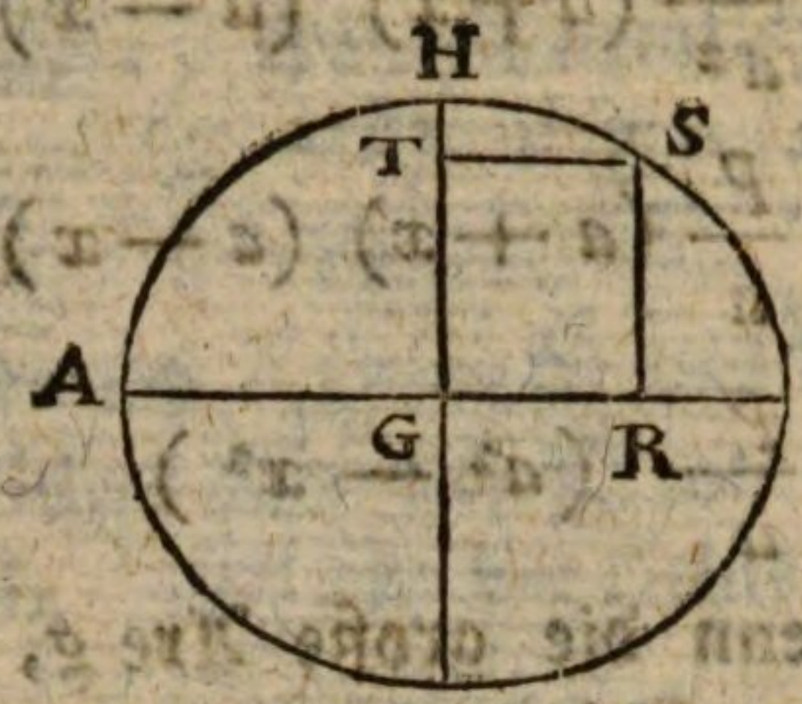
§. 19.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Ellipse finden, wenn die Abzissen auf der kleinen Axe genommen werden.

Auf-

Auflösung.



Es sey $AG = a$, $GH = b$, $GR = x$, $RS = y$, so ist (§. 17)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$a^2 . y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$$

$$a^2 . y^2 = a^2 . b^2 - b^2 x^2$$

$$b^2 . x^2 = a^2 . b^2 - a^2 . y^2$$

$$b^2 x^2 = a^2 (b^2 - y^2)$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

oder $GR^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - RS^2)$

oder $TS^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - GT^2)$

Es sey nun $TS = y'$ und $GT = x'$ so ist

$$y' y' = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x' x')$$

oder $y' y' = \frac{a^2}{b^2}(b + x')(b - x')$

Welche Gleichung mit der ersteren, die sich auf die große Axe bezog, übereinstimmet, nur daß die Buchstaben a und

a und b verwechselt sind. Man suche eine dritte Proporzionallinie p, zu b und a, so ist $a^2 = bp$, und

$$y'y' = \frac{bp}{b^2}(b + x')(b - x')$$

$$y'y' = \frac{p}{b}(b^2 - x'x')$$

Diese dritte Proporzional-Linie kann man, der Einförmigkeit halben, den Parameter der kleinen Axe nennen, obgleich in der kleinen Axe keine Brennpunkte sind.

Anders. Gesetzt, man wolle die Abzissen vom Ende H der kleinen Axe an rechnen, so daß $HT = x''$. Vorher war $TG = x'$. Es ist aber $TG = GH - TH$ oder $x' = b - x''$. Daher ist $x'x' = b^2 - 2bx'' + x''x''$. Setzet man diesen Werth in die Gleichung

$$y'y' = \frac{p}{b}(b^2 - x'x')$$

so wird $y'y' = \frac{p}{b}(2bx'' - x''x'')$

wo p der halbe Parameter der kleinen Axe, und b die halbe kleine Axe ist. Will man den ganzen Parameter durch n' und die ganze kleine Axe durch g' andeuten, so wird

$$y'y' = \frac{n'}{g'}(g'x'' - x''x'')$$

$$y'y' = \frac{n'}{g'}x''(g' - x'')$$

Welche Gleichung wiederum mit der Gleichung für die große Axe übereinstimmet, nur daß hier der Parameter größer ist als beide Axen, da er hingegen bei der großen Axe kleiner war.

Zusatz I. Wenn also in einer Ellipse die halbe große Axe a und die halbe kleine Axe b ist, so ist die Gleichung entweder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

oder $$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$$

nachdem die Abzissen x auf der großen oder kleinen Axe vom Mittelpunkte aus genommen werden.

Zusatz II. Beschriebe man einen Zirkel mit dem Halbmesser a, so wäre die Gleichung vom Mittelpunkte aus (§. 7.)

$$y^2 = a^2 - x^2$$

da nun in der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

so verhält sich y^2 im Zirkel, zu y^2 in der Ellipse, wie $a^2 - x^2$ zu $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder, wie 1 zu $\frac{b^2}{a^2}$ oder wie a^2 zu b^2. Folglich y im Zirkel zu y in der Ellipse, wie a zu b.

Beziehet sich die Gleichung der Ellipse auf die kleine Axe b, so ist im Zirkel, der b zum Halbmesser hat,

$$y^2 = b^2 - x^2$$

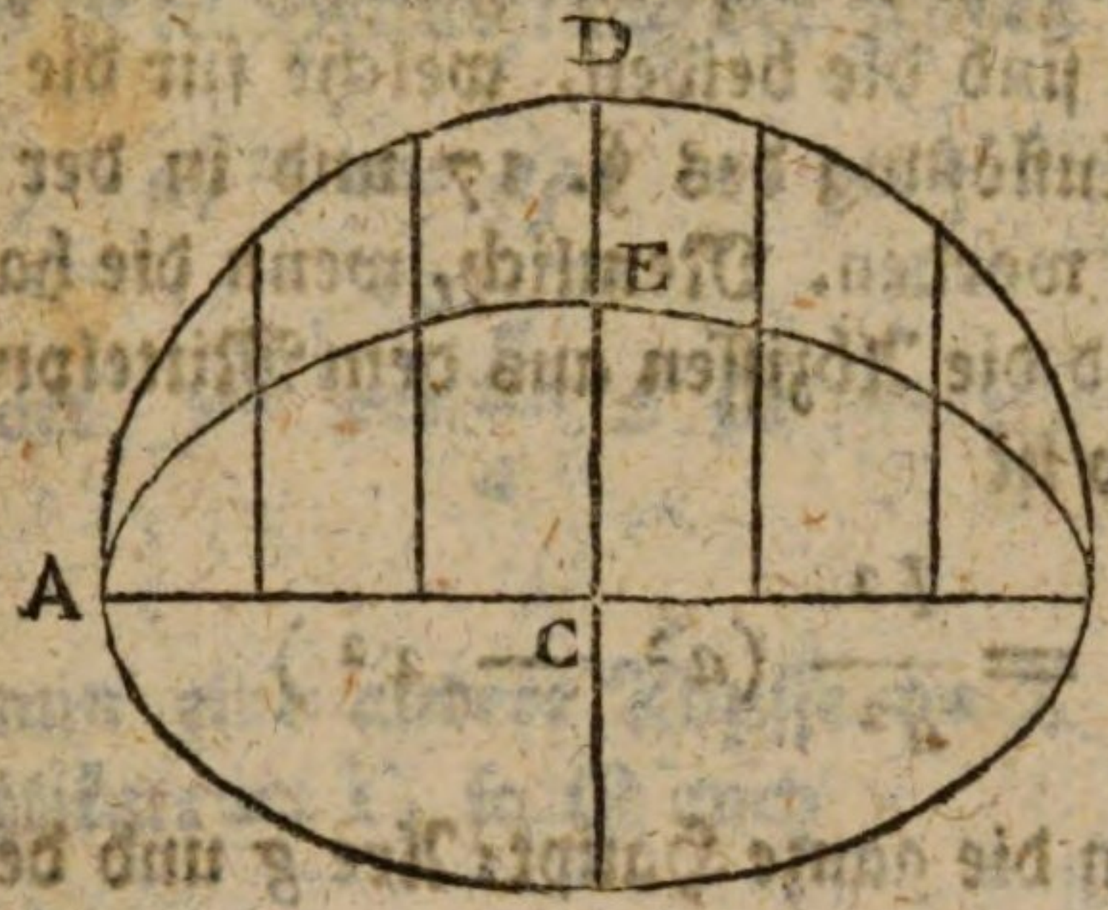
und in der Ellipse, die b zur halben kleinen Axe hat,

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$$

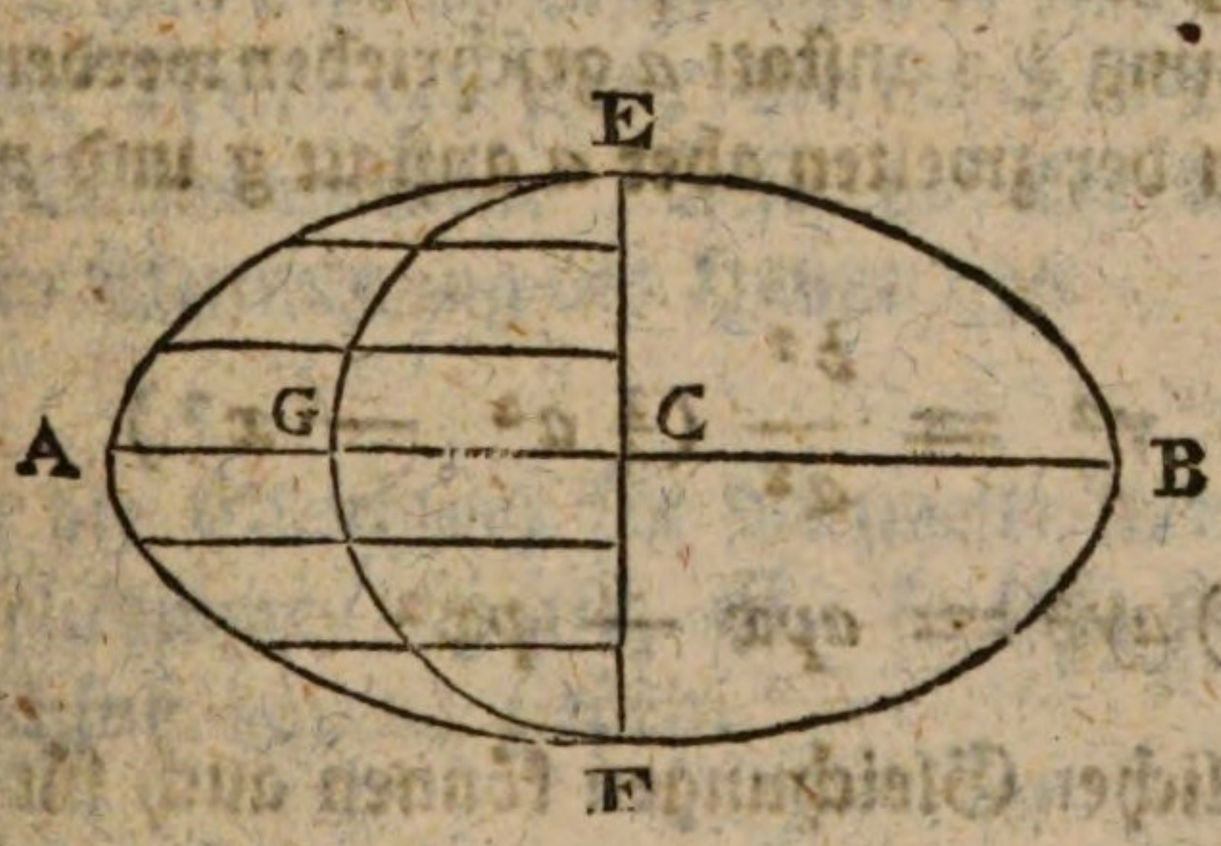
folglich verhält sich y^2 im Zirkel, zu y^2 in der Ellipse, wie $b^2 - x^2$ zu $\frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2)$, oder wie 1 zu $\frac{a^2}{b^2}$, oder wie b^2 zu a^2. Folglich ist y im Zirkel zu y in der Ellipse, wie b zu a.

Dies

Dieses giebt uns ein bequemes Mittel an die Hand, um eine Ellipse zu beschreiben.



Beschreibe über der großen Axe AB einen halben Zirkel ADB. Ziehe einige Applikaten senkrecht über dem Diameter AB. Verkürze sie alle nach dem Verhältniße der halben großen Axe CB zur halben kleinen Axe CE, so bekömmst du die Punkte, wodurch die Ellipse gehen soll.



Oder, umgekehrt, beschreibe über der kleinen Axe EF einen halben Zirkel EGF. Ziehe einige Applikaten, und verlängere sie alle nach dem Verhältniße der halben kleinen Axe CE zur halben großen Axe CB, so bekömmst du wiederum Punkte, welche den Lauf der Ellipse bestimmen.

§. 20.

Die verschiedenen Gleichungen, die wir für die Ellipse gefunden haben, sind nicht alle gleich gebräuchlich. Die gewöhnlichsten sind die beiden, welche für die Haupt-Axe in der ersten Auflösung des §. 17 und in der zweiten des §. 18 gefunden worden. Nemlich, wenn die halben Axen a und b sind, und die Abzissen aus dem Mittelpunkte gerechnet werden, so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Wenn hingegen die ganze Haupt-Axe g und der ganze Parameter n ist, die Abzissen aber aus dem einen Scheitel gerechnet werden, so ist

$$gy^2 = ngx - nx^2$$

Um mehrerer Einförmigkeit willen, wollen wir die ganze Haupt-Axe mit a, die ganze zweite Axe mit b, und den ganzen Parameter mit p bezeichnen, so muß in der ersten Gleichung $\frac{1}{2}a$ anstatt a geschrieben werden, und $\frac{1}{2}b$ anstatt b, in der zweiten aber a anstatt g und p anstatt n, so wird

$$\text{I)}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)$$

$$\text{II)}\quad ay^2 = apx - px^2$$

Die nemlichen Gleichungen können auch für die kleine Axe dienen, wenn man unter a die kleine Axe, unter b die große und unter p den Parameter der kleinen Axe verstehet.

§. 21.

In der Ellipse verhalten sich die Quadrate der Applikaten, wie die Rektangel aus beiden abgeschnit-

schnittenen Theilen der Axe, in Betrachtung sowohl der kleinen als der großen Axe.

Denn es ist in Betrachtung der großen Axe

$$ay^2 = apx - px^2$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{p}{a} \cdot x\,(a - x)$$

Es sey nun eine andere Abziſſe $= X$ und die dazu gehörige Applikate $= Y$, so ist auch

$$Y^2 = \frac{p}{a} \cdot X\,(a - X)$$

$$\text{folglich } y^2, Y^2 :: \frac{p}{a} \cdot x(a - x), \frac{p}{a} \cdot X(a - X)$$

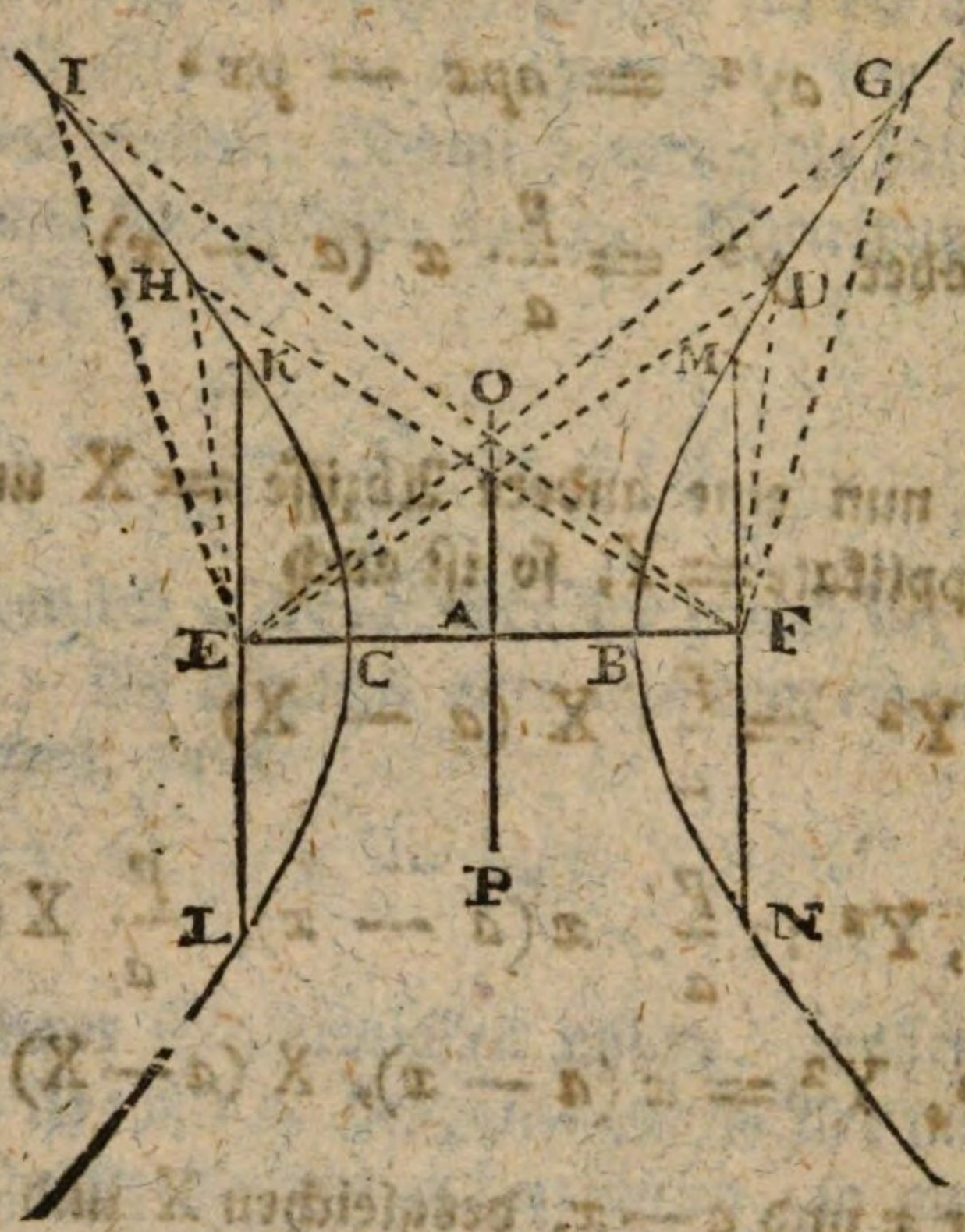
$$\text{oder } y^2, Y^2 = x\,(a - x),\ X\,(a - X)$$

es sind aber x und $a - x$, desgleichen X und $a - X$ beide abgeschnittene Theile der Axe, die durch die Applikaten y und Y bestimmet werden. Also hat der Lehrsatz seine Richtigkeit in Betrachtung der Haupt-Axe.

Und da die Gleichung für die zweite Axe mit der angeführten vollkommen ähnlich ist, so läßt sich auch der nemliche Schluß daraus ziehen.

§. 22.

Ein Hyperbel BDG ist eine krumme Linie, die in Betrachtung zweier festen Punkte E und F so beschrieben



worden, daß der Unterschied der Entfernung jedes Punktes in der krummen Linie, sowohl von dem einem als von dem anderen festen Punkte allemal einerley sey, so daß z. E. GE — GF = DE — DF = BE — BF; und da sich in Betrachtung der nemlichen Punkte E und F, in umgekehrter Lage die nemliche Linie noch einmal beschreiben läßt, so pfleget man beide entgegengesezte Hyperbeln zugleich zu betrachten. In der entgegengesezten Hyperbel ist also gleichfalls IF — IE = HF — HE = CF — CE.

Die festen Punkte E und F werden, wie bei der Ellipse die Brennpunkte genannt. Die Linien GE, GF; DE, DF; IF, IE; HF, HE, welche von einem Punkte der Hyperbel bis zu den Brennpunkten gehen, sind Vektoren.

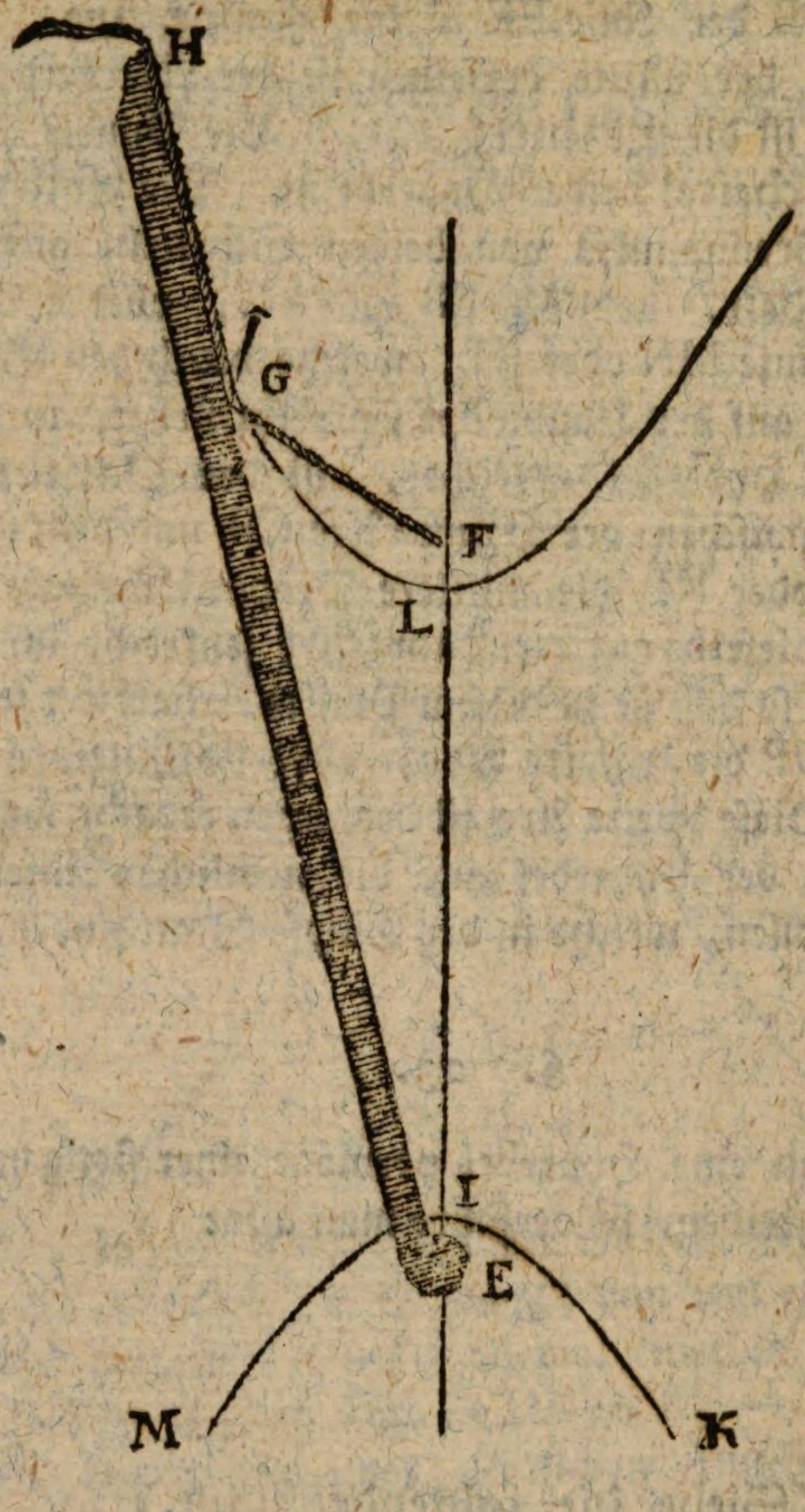
Der

Der Theil CB der Linie EF ist die Haupt-Axe. Der Punkt A in der Mitte derselben ist der Mittelpunkt, AF oder AE ist die Ekzentrizität. Die Punkte B und C sind die Scheitel beider Hyperbeln. Die Entfernung des einen Brennpunkts von beiden Scheiteln giebt die beiden Apsiden, nemlich FB und FC, oder EC und EB. Die Linie MN oder KL, welche durch den Brennpunkt gehet, auf der Haupt-Axe senkrecht stehet, und beiderseits die Hyperbel erreichet, ist der Parameter. Man suche zwischen der Haupt-Axe CB und dem Parameter MN oder KL die mittlere Proporzionallinie OP, und errichte dieselbe auf der Haupt-Axe senkrecht im Mittelpunkte A, so daß sie in diesem Punkte A halbiret sey, so wird diese OP die zweite Axe, oder konjugirte Axe genannt. Diese zweite Axe ist deswegen erdacht worden, weil man in der Hyperbel alle die nemlichen Linien hat anbringen wollen, welche in der Ellipse Statt finden.

§. 23.

Will man eine Hyperbel vermöge einer stetigen Bewegung beschreiben, so verfahre man also:

(Siehe die folgende Figur.)



Man wähle zwei Punkte E und F, welche die Brennpunkte werden sollen. In E befestige man das Ende eines Lineals, doch so, daß es sich um den Punkt E drehen lasse. Am anderen Ende H des Lineals binde man einen Faden HGF, der kürzer sey, als das Lineal HE. Das andere Ende des Fadens befestige man im Punkte F. Man halte den Faden stramm an dem Lineale vermittelst eines Stiftes G, und drehe allmählig das Lineal um den Punkt E. So wird der Stift G eine Hyperbel beschreiben.

Denn

Denn es sey der Faden um a kürzer als das Lineal, so ist allemal

$$HE - HGF = a$$

oder

$$(HG + GE) - (HG + GF) = a$$

oder

$$GE - GF = a$$

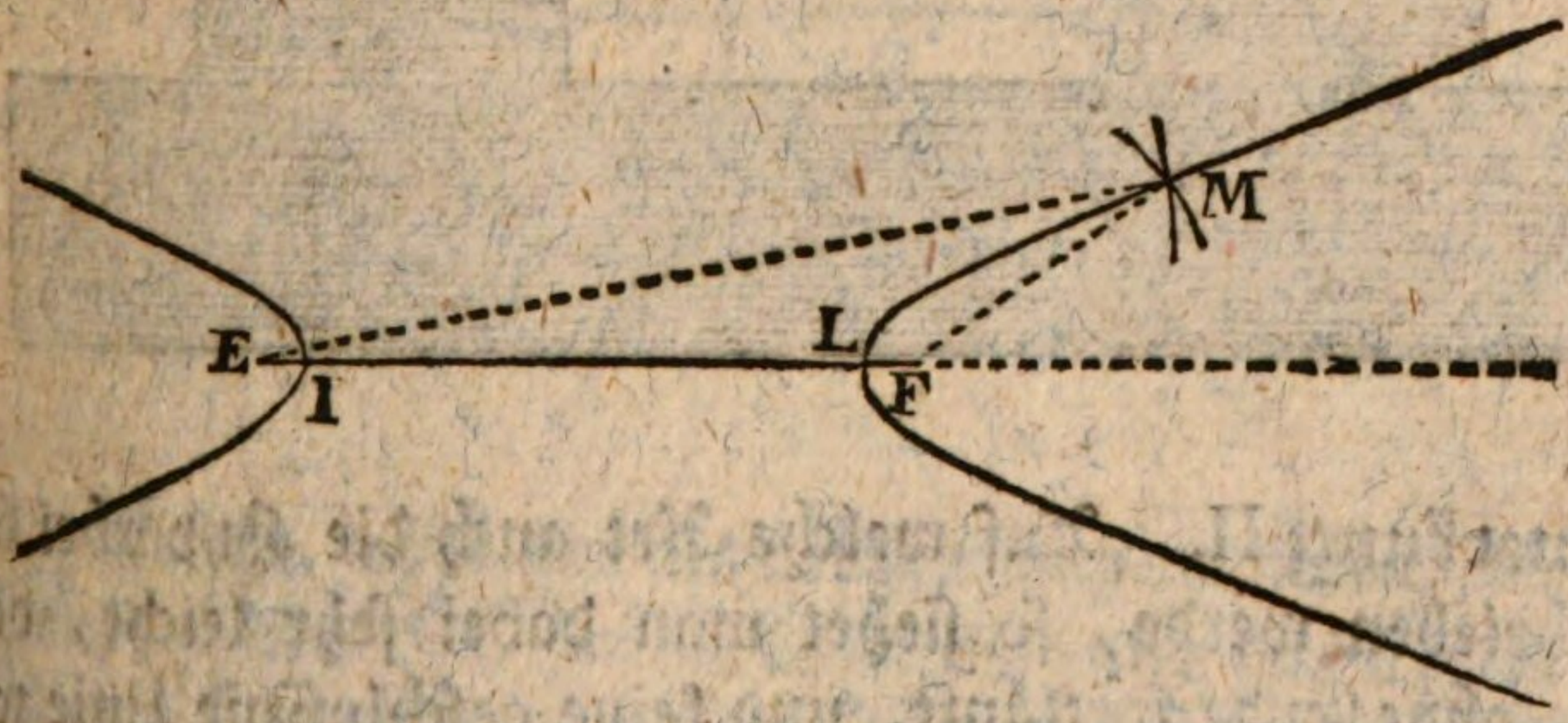
nemlich der Unterschied der Vektoren GE und GF ist allemal a. Folglich ist die beschriebene Linie eine Hyperbel.

Befestiget man nun das Ende des Lineals in F und das Ende des Fadens in E, so bekömmt man die entgegengesetzte Hyperbel MK, worin alles vollkommen wie in der ersten beschaffen ist, nur daß die Lage umgekehrt ist.

Zusatz. Hieraus, und aus obigen Difinizionen ist leicht einzusehen, 1) daß die verlängerte Haupt-Axe jede Hyperbel in zwei ähnlichgleiche Theile eintheilet; 2) daß $EI = LF$; 3) daß der Unterschied der zusammengehörenden Vektoren allemal der Haupt-Axe LI gleich sey. Denn, vermöge der Natur dieser Linie ist der Unterschied der Entfernungen $LE - LF$ gleich jedem anderen Unterschiede $GE - GF$. Es ist aber $LE - LF = LE - EI = LI$. Also ist $LI = GE - GF$.

§. 24.

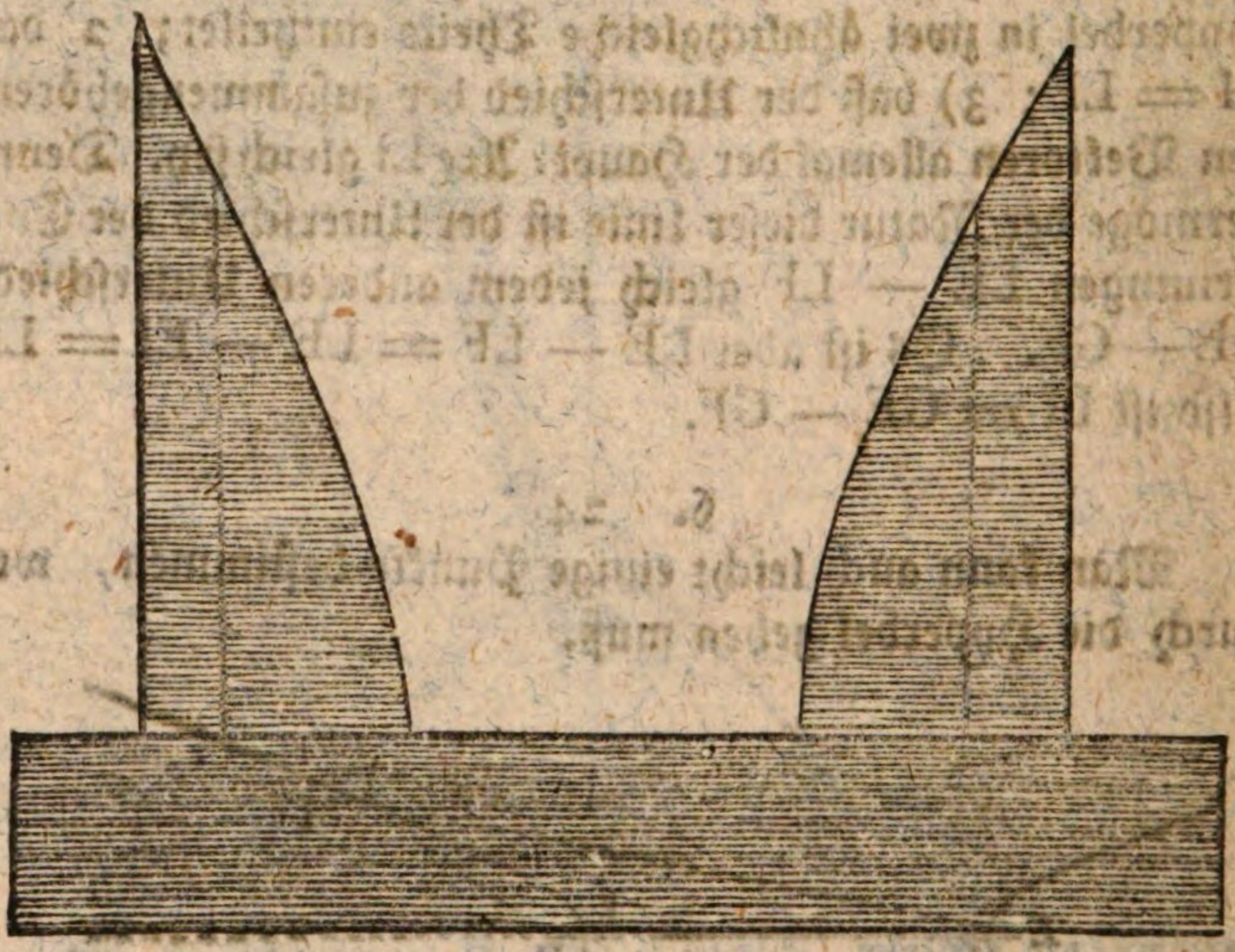
Man kann auch leicht einige Punkte bestimmen, wodurch die Hyperbel gehen muß.



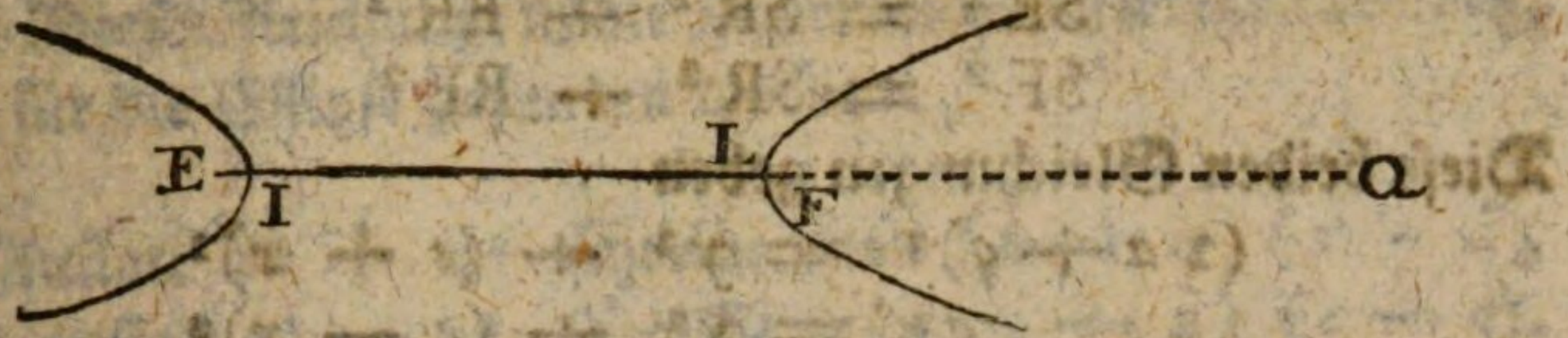
Es sey gegeben die Haupt-Axe IL und die doppelte Ekzentrizität EF. Aus F beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser einen Zirkelbogen in M. Verlängere den angenommenen Halbmesser um IL, und aus E beschreibe

einen Zirkelbogen, der den vorigen in M schneide, so gehöret der Punkt M zur Hyperbel, welches genugsam aus allem vorigen erhellet. Je mehr nun solche Punkte wie M bestimmet werden, desto sicherer kann man durch dieselben die Hyperbel ziehen. Auf eine gleiche Art läßt sich die entgegengesetzte Hyperbel beschreiben.

Anmerkung I. Man mache sich, wie bei der Parabel und Ellipse gerathen worden, einige Muster, womit man ohne viele Mühe Hyperbeln zeichnen könne. Ein dergleichen Muster stellet gegenwärtige Figur vor.



Anmerkung II. Auf welche Art auch die Hyperbel beschrieben werde, so siehet man dabei sehr leicht, daß sie ohne Ende fortläuft, und keine geschlossene Linie wie die Ellipse seyn kann.



Denn könnte sie irgendwo in Q ihre verlängerte Axe durchschneiden, so müßte seyn

$$QE - QF = IL$$

Es ist aber $QE - QF = EF$

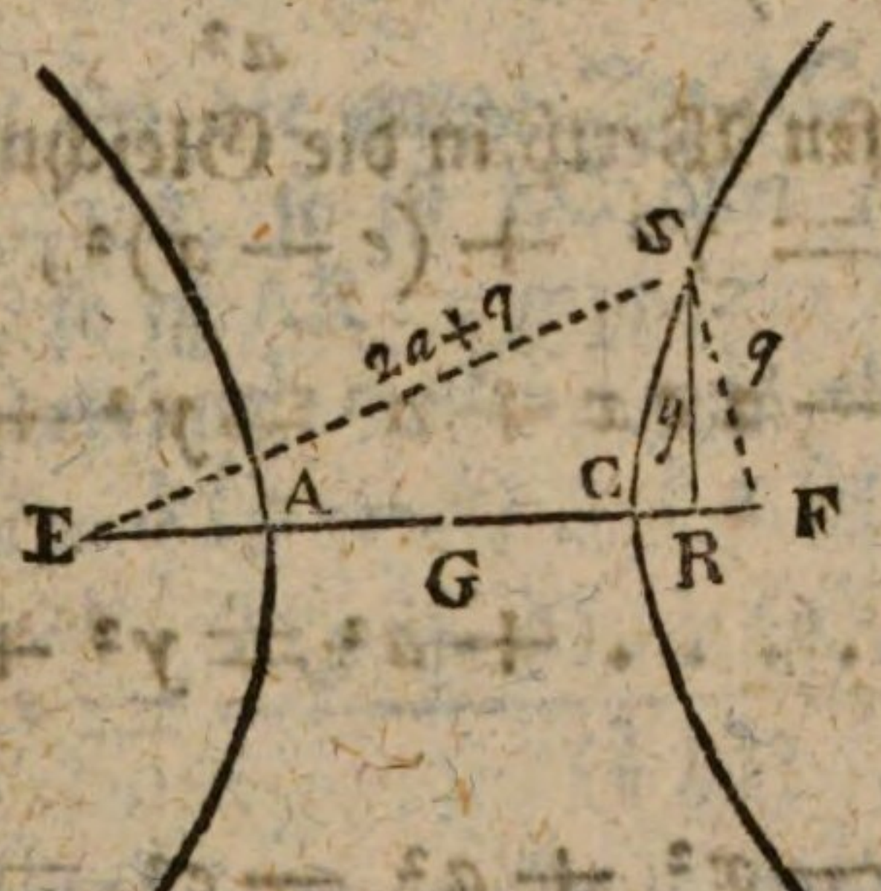
Folglich wäre $IL = EF$, welches widersinnig ist.

§. 25.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn die halbe Haupt-Axe und die Ekzentrizität gegeben sind.

Auflösung.



Gesetzt, es werde als bekannt angenommen, die halbe Haupt-Axe $GC = GA = a$, und die Ekzentrizität $GF = GE = e$, und die Abzissen werden vom Mittelpunkte G an gerechnet, so daß $GR = x$, und $RS = y$. Ziehe die Vektoren SE, und SF. Es sey ferner $SF = q$, so ist $SE = 2a + q$, weil $SE - SF = AC$, $SE - q = 2a$, $SE = 2a + q$. Nun ist, wegen der rechtwinklichen

Dreiecke, SE

$$SE^2 = SR^2 + ER^2$$
$$SF^2 = SR^2 + RF^2$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$(2a + q)^2 = y^2 + (e + x)^2$$
$$q^2 = y^2 + (e - x)^2$$

Die erste Gleichung giebt

$$4a^2 + 4aq + q^2 = y^2 + (e+x)^2$$

Ziehe ab $q^2 = y^2 + (e-x)^2$

bleibet $4a^2 + 4aq \ldots = \ldots\ldots (e+x)^2 - (e-x)^2$

$$4a^2 + 4aq = 4ex$$
$$a^2 + aq = ex$$
$$aq = ex - a^2$$
$$q = \frac{ex - a^2}{a}$$
$$q = \frac{ex}{a} - a$$
$$q^2 = \frac{e^2x^2}{a^2} - 2ex + a^2$$

Setzet man diesen Werth in die Gleichung

$q^2 = y^2 + (e - x)^2$, so kömmt

$$\frac{e^2x^2}{a^2} - 2ex + a^2 = y^2 + e^2 - 2ex + x^2$$
$$\frac{e^2x^2}{a^2} \ldots\ldots + a^2 = y^2 + e^2 + x^2$$
$$\frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 + a^2 - e^2 = y^2$$
$$\left(\frac{e^2}{a^2} - 1\right)x^2 - (e^2 - a^2) = y^2$$
$$\left(\frac{e^2 - a^2}{a^2}\right)x^2 - (e^2 - a^2) = y^2$$
$$(e^2 - a^2)x^2 - a^2(e^2 - a^2) = a^2y^2$$
$$(x^2 - a^2) \cdot (e^2 - a^2) = a^2y^2$$
$$\frac{(x^2 - a^2) \cdot (e^2 - a^2)}{a^2} = y^2$$

Die-

Diese Gleichung für die Hyperbel ist derjenigen ähnlich, die für die Ellipse gefunden worden.

Anstatt $x^2 - a^2$ schreibe man $(x + a)(x - a)$,
and anstatt $e^2 - a^2$ schreibe man $(e + a)(e - a)$,
so hat man

$$\frac{(x+a)(x-a) \cdot (e+a)(e-a)}{a^2} = y^2$$

oder

$a^2, (e+a)(e-a) :: (x+a)(x-a), y^2$
$GC^2, AF \times AE :: AR \times CR, RS$

woraus man siehet, daß in der Hyperbel, eben so wie in der Ellipse, das Quadrat der halben Haupt-Axe, sich verhält zum Rektangel aus beiden Apsiden; wie das Rektangel beider abgeschnittenen Theile der Axe CR und AR, zum Quadrate der Applikate RS.

Anders. Es sey die ganze Axe $AC = g$, die Apside AE oder $CF = h$, so ist EC oder $AF = g + h$. Es sey $CR = x$, so ist $AR = g + x$. Es sey endlich $RS = y$, so ist, vermöge dessen, was eben jetzt gefunden worden $(\frac{1}{2}g)^2, h(g+h) :: x(g+x), y^2$

$$\text{daher ist } y^2 = \frac{h(g+h) \cdot x(g+x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

Zusatz I. Gesetzt, es werde in dieser letzten Gleichung $x - CF = h$, so wird y zum halben Parameter. Dieser halbe Parameter sey p, so ist

$$p^2 = \frac{h(g+h) \cdot h(g+h)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

Das heißt, das Rektangel aus beiden Apsiden ist die mittlere Proporzional-Größe zwischen dem Quadrate der halben Haupt-Axe und dem Quadrate

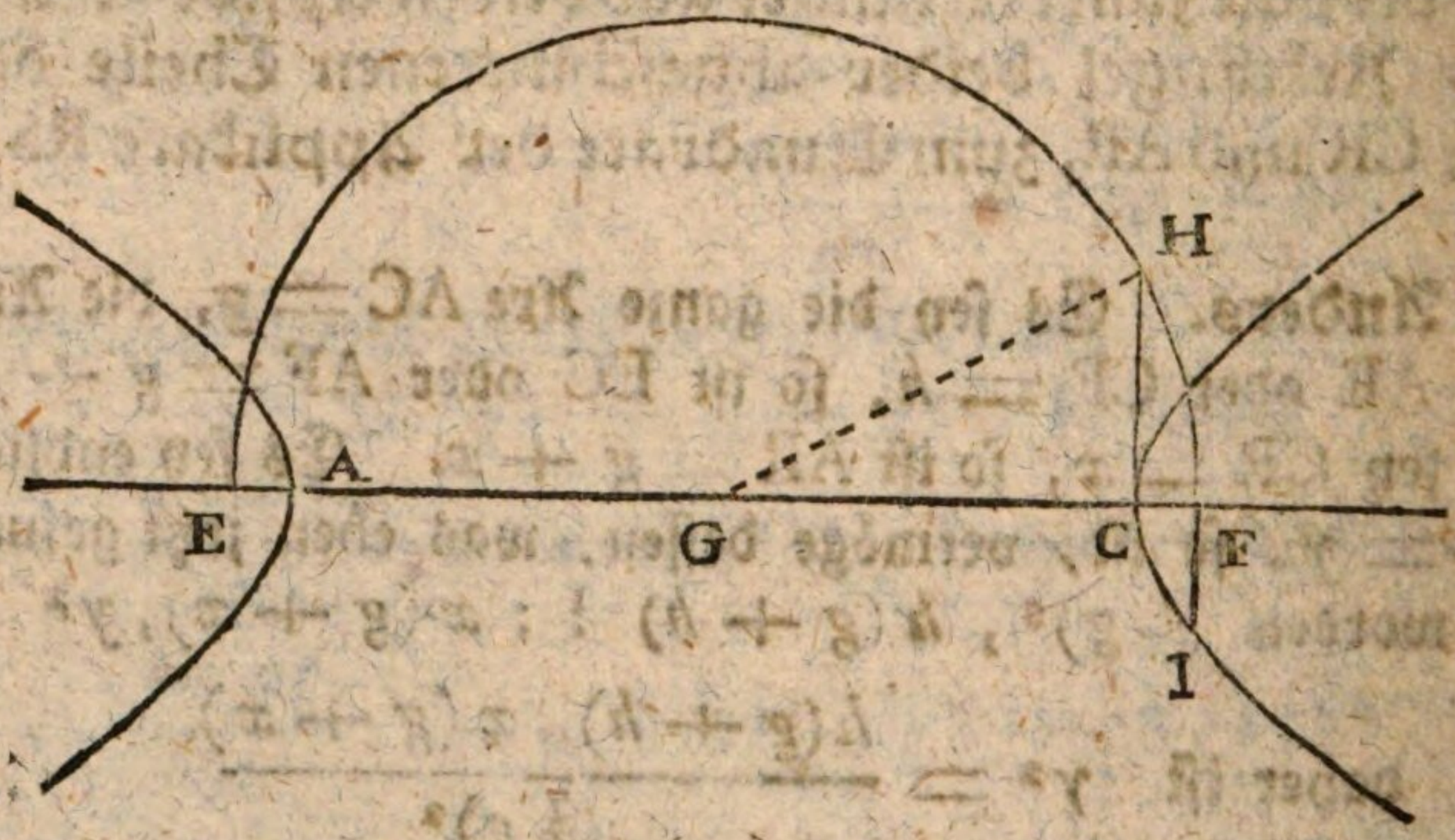
drate des halben Parameters. Aus der letzten Gleichung ziehet man auch

$$p = \frac{h\,(g + h)}{\frac{1}{2}\,g}$$

oder $p\,(\frac{1}{2}\,g) = h\,(g + h)$

Das heißt, das Rektangel aus dem halben Parameter und der halben Haupt-Axe ist gleich dem Rektangel aus beiden Apsiden.

Zusatz II. Es sey gegeben die Haupt-Axe $AC = g$ und der halbe Parameter p, und es solle die Hyperbel konstruiret werden.



Suche zwischen $\frac{1}{2}$ AC oder GC und dem halben Parameter p die mittlere Proporzionallinie $CH = \sqrt{(\frac{1}{2}\,pg)}$ und errichte sie senkrecht in C. Aus dem Mittelpunkte G beschreibe durch den Punkt H einen Kreis, so wird dieser die verlängerte Axe irgendwo in E und F schneiden. Diese Punkte E und F sind die Brennpunkte. Da nun die Haupt-Axe AC und die Brennpunkte E, F bestimmet sind,

so

so läßt sich die Hyperbel beschreiben. (§. 23. und §. 24.) Und es wird $FI = p$. Denn es ist

$$FC, CH :: CH, CE$$
$$FC, CH :: CH, (EA + AC)$$
$$FC, CH :: CH, (FC + CA)$$
$$FC, \sqrt{(\tfrac{1}{2}pg)} :: (\sqrt{\tfrac{1}{2}pg}), (FC + g)$$

daher $\frac{1}{2}pg = FC \times (g + FC)$

welche Gleichung mit der im vorigen Zusatze gefundenen

$$\tfrac{1}{2}pg = h(g + h)$$

einerlei ist, und folglich ist $h = FC$.

Zusatz III. Ist die halbe zweite Axe der Hyperbel gegeben, so ist diese die mittlere Proporzional-Linie zwischen p und $\frac{1}{2}g$. Man mache also CH der halben zweiten Axe gleich, und verfahre wie im vorigen Zusatze.

§. 26.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn die Haupt-Axe und der Parameter als bekannt angenommen werden.

Auflösung. In der ersten Auflösung des vorigen Paragraphs war

$$y^2 = \frac{(x+a)(x-a)(e+a)(e-a)}{a^2}$$

wo a die halbe Axe, e die Ekzentrizität, und x die Abzisse vom Mittelpunkte aus war. In dieser Gleichung ist $(e+a)(e-a)$ das Rektangel aus beiden Apsiden. Es wurde aber bei voriger Auflösung gefunden, daß dieses Rektangel dem Rektangel aus dem halben Parameter und

der

der halben Axe gleich sey. Ist demnach der halbe Parameter p und die halbe Axe a, so wird

$$y^2 = \frac{(x+a)\,(x-a).\,ap}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{p}{a}\,(x+a)\,(x-a)$$

$$y^2 = \frac{p}{a}\,(x^2-a^2)$$

Anders. Will man die Abzissen vom nächsten Scheitel an rechnen, so erinnere man sich der Gleichung, die in der zweiten Auflösung des vorigen Paragraphs gefunden worden, nemlich

$$y^2 = \frac{h\,(g+h).\,x\,(g+x)}{(\frac{1}{2}g)^2}$$

Hier ist wiederum $h\,(g+h)$ das Rektangel aus beiden Apsiden, welches also dem Rektangel aus dem halben Parameter und der halben Axe gleich ist. Es sey der Parameter n, so ist folglich $h(g+h) = (\frac{1}{2}g).(\frac{1}{2}n)$. Also

$$y^2 = \frac{\frac{1}{2}g.\,\frac{1}{2}n.\,x\,(g+x)}{\frac{1}{2}g.\,\frac{1}{2}g}$$

$$y^2 = \frac{\frac{1}{2}n.\,x\,(g+x)}{\frac{1}{2}g}$$

$$y^2 = \frac{n}{g}\,x\,(x+g)$$

$$\text{oder}\quad y^2 = \frac{n}{g}\,(x^2+gx)$$

$$\text{oder}\quad gy^2 = nx^2+ngx$$

§. 27.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn beide Axen als bekannt angenommen werden.

Auflösung. Nimmt man den Mittelpunkt zum Ursprunge der Abzissen, so ist (§ 26.)

$$y^2 = \frac{p}{a}(x^2 - a^2)$$

wo p den halben Parameter, und a die halbe Haupt-Axe vorstellet. Nun ist die zweite Axe in der Hyperbel nichts anders, als die mittlere Proporzional-Linie zwischen der Haupt-Axe und dem Parameter. Es sey demnach die halbe zweite Axe $= b$, so ist

$$2p, 2b :: 2b, 2a$$

oder $p, b :: b, a$

folglich $ap = bb$

$$p = \frac{bb}{a}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$$

Setzet man anstatt $\frac{p}{a}$ dessen Werth $\frac{b^2}{a^2}$, so wird

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

wo b und a die halben Axen sind, und die Abzissen aus dem Mittelpunkte entspringen.

Anders. Wenn die Abzissen vom nächsten Scheitel an gerechnet werden, wenn dabei die große Axe g und der Parameter n genannt wird, so ist (§. 26.)

$$y^2 = \frac{n}{g}(x^2 + gx)$$

Es sey k die kleine Axe, so ist

$$ng = k^2$$

$$n = \frac{k^2}{g}$$

$$\frac{n}{g} = \frac{k^2}{g^2}$$

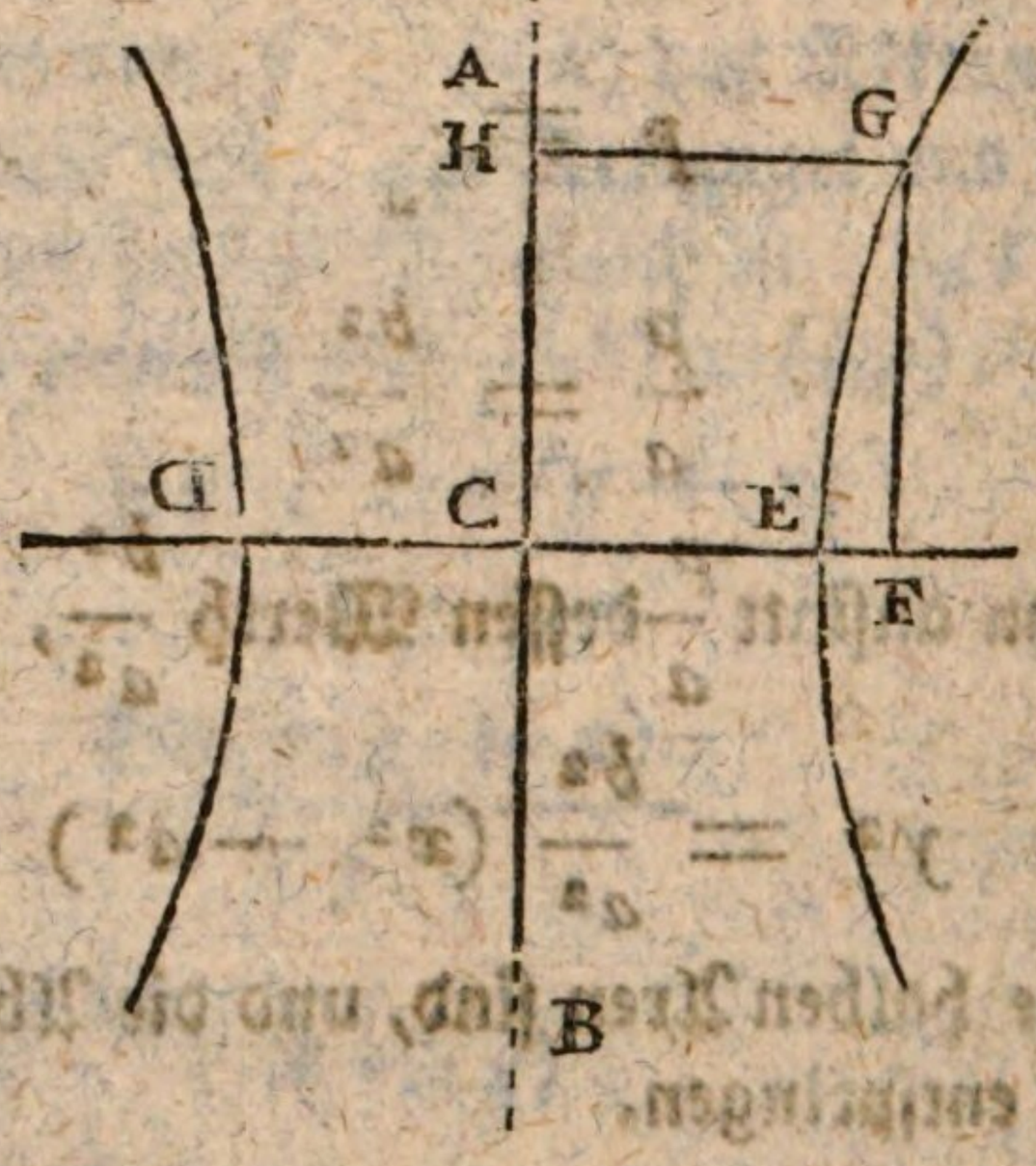
folglich wird $y^2 = \frac{k^2}{g^2}(x^2 + gx)$

wo also k und g beide ganze Axen sind, und wo die Abzissen aus dem nächsten Scheitel entspringen.

§. 28.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn die Abzissen auf der zweiten Axe genommen werden.



Es sey die erste Axe DE $= 2a$, die zweite AB $= 2b$, so ist, wenn CF $= x$, und FG $= y$,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

Setzet

Setzet man nun umgekehrt, daß FG oder CH $= x$, und CF oder HG $= y$, so wird

$$x^2 = \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2)$$

$$\frac{a^2 x^2}{b^2} = y^2 - a^2$$

$$\frac{a^2 x^2}{b^2} + a^2 = y^2$$

$$a^2 x^2 + a^2 b^2 = b^2 y^2$$

$$a^2 (x^2 + b^2) = b^2 y^2$$

$$\frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2) = y^2$$

woraus man siehet, daß die Gleichung in Betrachtung der zweiten Axe nicht wie bei der Ellipse, der Gleichung für die erste Axe, vollkommen ähnlich ist. Auch wollen wir uns bei der zweiten Axe nicht länger aufhalten.

§. 29.

Eine Hyperbel wird gleichseitig genannt, wenn der Parameter der Haupt-Axe gleich ist. Alsdann wird auch die zweite Axe dem Parameter und der Haupt-Axe gleich.

Die Gleichung für jede Hyperbel ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

wo b und a die halben Axen vorstellen und die Abzissen aus dem Mittelpunkte entspringen (§ 27.) Wird nun $b = a$, so ist $y^2 = x^2 - a^2$

und dieses ist die Gleichung für die gleichseitige Hyperbel, worin a die halbe Axe oder der halbe Parameter ist.

Es war auch (§. 26.) $y^2 = \frac{n}{g}(x^2 + g x)$

für den Fall, wo die Abzissen aus dem nächsten Scheitel entspringen, da dann g die Haupt-Axe und n der Parameter ist. Wird nun $n = g$, so bekömmt man

$$y^2 = x^2 + g\,x$$

für die gleichseitige Hyperbel, wo g demnach die ganze Axe oder der ganze Parameter ist, und wo die Abzissen aus dem nächsten Scheitel entspringen.

Man wird leicht bemerken, daß diese Gleichungen für die gleichseitige Hyperbel von den Gleichungen des Zirkels (§. 6. u. 7) nur in den Zeichen abweichen.

§. 30.

Unter den verschiedenen Gleichungen die wir für die Hyperbel gefunden haben, sind wiederum, wie bei der Ellipse, zwei derselben gebräuchlicher, als alle übrigen, nemlich diejenigen, welche in der ersten Auflösung des §. 27. und in der zweiten Auflösung des §. 26. angeführet worden. Wenn die halben Axen a und b sind, und die Abzissen aus dem Mittelpunkte gerechnet werden, so ist

$$y = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)$$

Wenn hingegen die ganze Haupt-Axe g und der ganze Parameter n ist, die Abzissen aber aus dem nächsten Scheitel gerechnet werden, so ist

$$g\,y^2 = n\,g\,x + n\,x^2$$

Um mehrerer Einförmigkeit willen, wollen wir die ganze Haupt-Axe mit a, die ganze zweite Axe mit b, und den ganzen Parameter mit p bezeichnen, so muß in der ersten Gleichung $\frac{1}{2}a$ anstatt a, und $\frac{1}{2}b$ anstatt b geschrieben werden; in der zweiten aber a anstatt g und p anstatt n, Dann wird

$$\text{I)}\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$\text{II)}\quad a\,y^2 = a\,p\,x + p\,x^2$$

Die nemlichen Gleichungen können aber nicht für die zweite Axe dienen.

§. 31.

In der Hyperbel, in Betrachtung ihrer Haupt-Axe, verhalten sich die Quadrate der Applikaten, wie die Rektangel aus beiden abgeschnittenen Theilen der Axe, welche Theile von jedem Scheitel bis zur Applikate gerechnet werden.

Denn es ist

$$ay^2 = apx + px^2$$

oder $y^2 = \frac{p}{a} x(a+x)$

Es sey nun eine andere Abzisse X und die dazu gehörige Applikate Y, so ist auch

$$Y^2 = \frac{p}{a} X(a+X)$$

daher ist

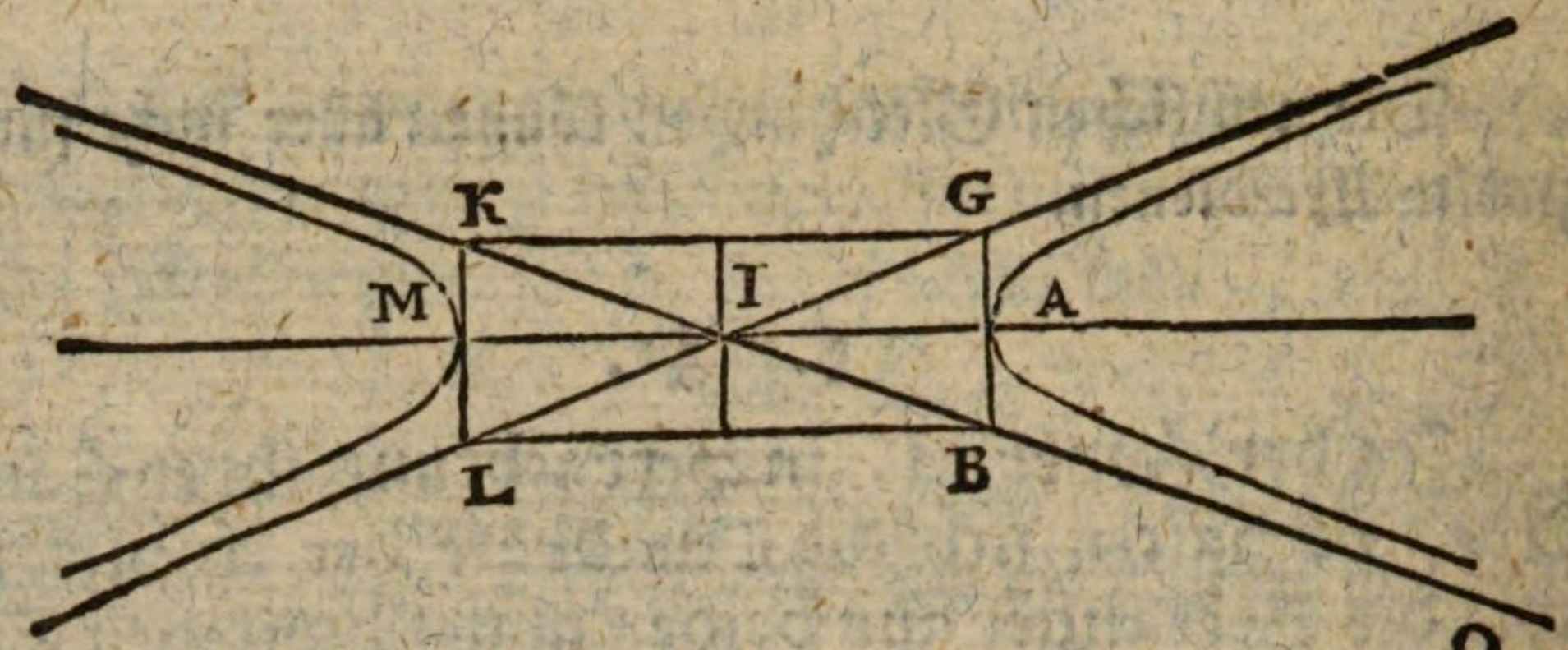
$$y^2, Y^2 :: \frac{p}{a} x(a+x), \frac{p}{a} X(a+X)$$

oder $y^2, Y^2 :: x(a+x), X(a+X)$

Es sind aber x und $a+x$, desgleichen X und $a+X$ beide abgeschnittene Theile der Axe, die durch die Applikaten y und Y bestimmet werden. Also hat der Lehrsatz seine Richtigkeit in Betrachtung der Haupt-Axe. Da die zweite Axe nicht die nemliche Gleichung giebt, so findet hier auch nicht die nemliche Eigenschaft Statt.

§. 32.

Im Scheitel A der Hyperbel werde AB senkrecht errichtet, und der halben zweiten Axe gleich gemacht Aus dem Mittelpunkte I werde durch das Ende B der AB eine gerade Linie IO von unbestimmter Länge gezogen, so wird diese IO die Asymptote der Hyperbel genannt.



Eben so können die Asymptoten für die übrigen Zweige der Hyperbel gezogen werden.

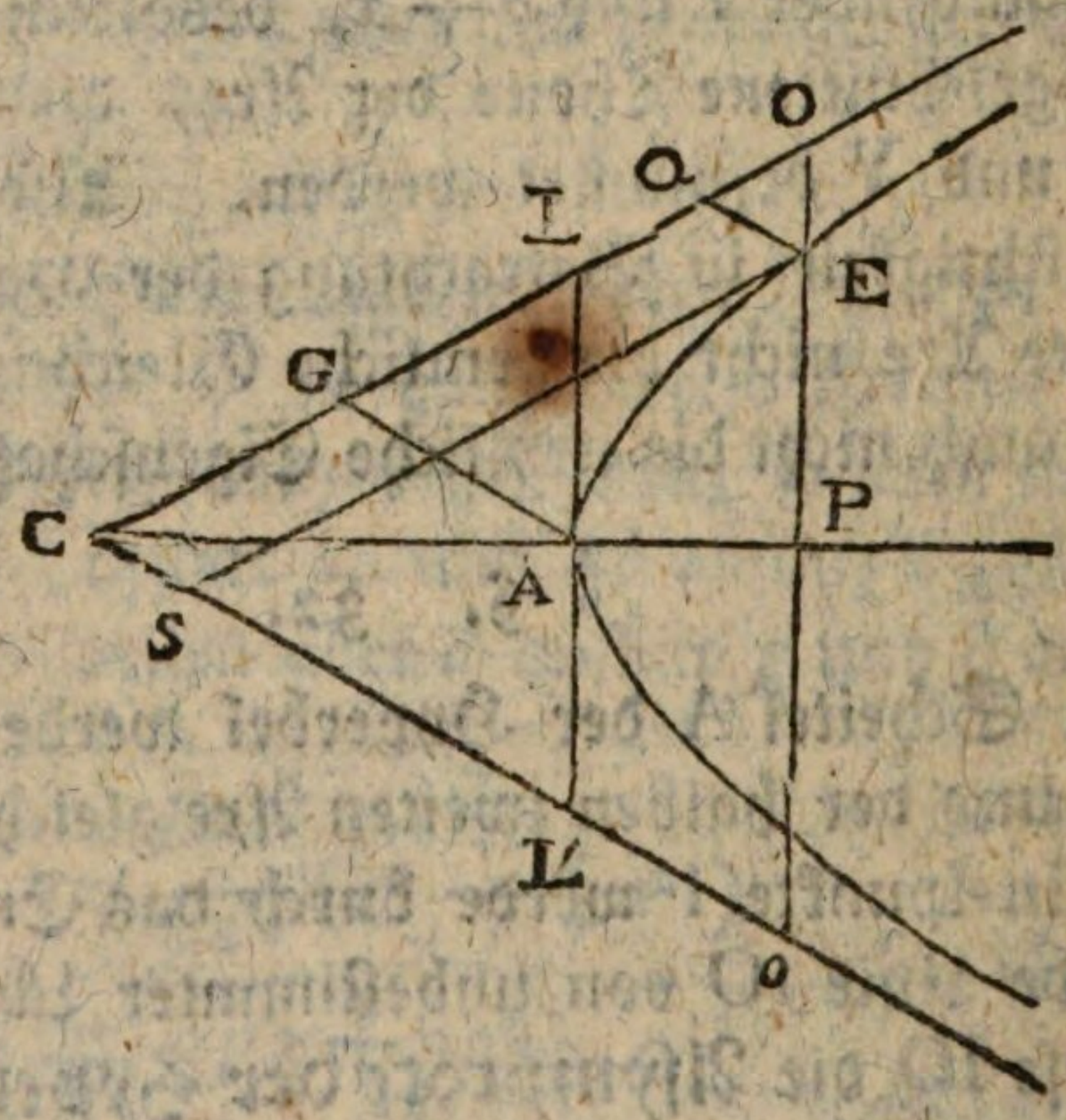
Oder man beschreibe über der Haupt-Axe AM das Rektangel BGKL, so daß AB, AG, MK, ML der Hälfte der zweiten Axe gleich seyn. Man ziehe die Diagonal-Linien KB, GL, so geben diese, wenn sie verlängert werden, die Asymptoten.

Was aber der Name Asymptote eigentlich zu bedeuten hat, und aus welchen Grunde er den gemeldeten Linien beygeleget wird, werden wir bald aus der folgenden Aufgabe erfahren.

§. 33.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Hyperbel finden, wenn eine Asymptote derselben zur Direktrisse angenommen wird.



Auf

Auflösung. Es sey C der Mittelpunkt der Hyperbel, CLO, CL'o die Asymptoten, E ein beliebiger Punkt in der Hyperbel. Ziehe EQ mit der Asymptote CL'o parallel. Nimmt man nun die Asymptote CLO zur Direktrisse, so ist EQ eine Applikate, und CQ die Abzisse. Es muß also eine Gleichung zwischen CQ und QE gefunden werden.

Um diese zu erhalten, ziehe durch den Punkt E die Linie OEo, und durch den Scheitel A die LAL' jede auf der Haupt-Axe senkrecht. Ziehe ferner ES mit CLO, hingegen AG mit CL'o parallel.

Es sey $CA = \frac{1}{2} a$, AL oder AL' $= \frac{1}{2} b$, $CP = z$, $PE = y$, $AG = m$, $GL = n$, $CQ = SE = t$. $QE = u$.

Die ähnlichen Dreiecke CPO, CAL geben

$$CA, AL :: CP, PO$$
$$\frac{1}{2} a, \frac{1}{2} b :: z, PO$$

oder $$a, b :: z, PO$$

daher $$PO = \frac{bz}{a}$$

Also $$EO = PO - PE = \frac{bz}{a} - y$$

$$Eo = Po + PE = PO + PE = \frac{bz}{a} + y$$

Folglich ist $$EO \times Eo = \frac{b^2 z^2}{a^2} - y^2$$

Es ist aber $$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (z^2 - \frac{1}{4} a^2)$$

also $$EO \times Eo = \frac{b^2 z^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} (z^2 - \frac{1}{4} a^2)$$

$$EO \times Eo = \frac{b^2}{a^2} (z^2 - z^2 + \frac{1}{4} a^2)$$

$$EO \times Eo = \frac{b^2}{a^2} (\frac{1}{4} a^2)$$

$$EO \times Eo = \frac{1}{4} b^2$$
$$EO \times Eo = (AL)^2$$

Ferner haben wir drei ähnliche Dreiecke QEO, ESo, AGL, welche aus parallelen Seiten bestehen. Folglich ist

$$AL, AG :: EO\ EQ$$

und $AL, GL :: Eo, ES$)

Multipliziret man diese beiden Proporzionen Satz für Satz, so kömmt

$$(AL)^2, (AG \times GL) :: (EO \times Eo), (EQ \times ES)$$

oder $\frac{1}{4}bb, \quad mn \quad :: \quad \frac{1}{4}bb, \quad ut$

daher ist $(AG \times GL) = (EQ \times ES)$

oder $(AG \times GL) = (EQ \times CQ)$

oder $mn = ut$

Weil der Punkt E willkürlich ist, so stelle man sich vor, er falle auf den Punkt A. Alsdann wird CQ oder ES zu CG und QE zu AG, folglich wird

$$AG \times GL = AG \times CG$$

also $GL = CG$

Beschreibet man in Gedanken über CL aus dem Mittelpunkte G einen Zirkel, so gehet er durch den Punkt A, wegen des rechten Winkels CAL. Also wird GA ein Halbmesser, und es ist $AG = GL = GC$, folglich ist

$$CQ \times QE = (AG)^2 = (CG)^2 = (GL)^2$$

oder $ut \ldots\ldots = m^2$

Bezeichnet, man wie gewöhnlich, die Abzisse CQ mit x und die Applikate QE mit y, so ist in der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten

$$xy = m^2$$

Dieses beständige Quadrat m^2 pfleget man die Potenz der Hyperbel zu nennen.

Zusatz I. Will man das Quadrat m^2 näher bestimmen, so betrachte man, daß

$$(CL)^2 = (AC)^2 + (AL)^2$$
$$(2\,CG)^2 = (AC)^2 + (AL)^2$$
$$4\,CG^2 = (AC)^2 + (AL)^2$$
$$4\,m^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2$$
$$m^2 = \tfrac{1}{16}(a^2 + b^2)$$

Wann die Hyperbel gleichseitig ist, so wird $b^2 = a^2$, folglich

$$m^2 = \tfrac{1}{16}(2\,a^2)$$
$$m^2 = \tfrac{1}{8}a^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}a)^2$$

Das heißt, in diesem Falle ist das Quadrat von m die Hälfte des Quadrats der halben Haupt-Axe.

In diesem Falle sind die Winkel ALC, ACL, ACL', AL'C' von 45g, folglich ist $\angle LCL' = 90g$; CL, CL' stehen senkrecht auf einander, und die Applikate QE ist folglich auch auf der Abzisse CQ senkrecht.

Zusatz II. Die gefundene Gleichung kann also ausgedrücket werden: das Rektangel aus beiden Koordinaten QC und QE ist allemal dem Quadrate einer beständigen Linie AG oder GC gleich, oder alle Rektangel aus zwei Koordinaten sind einander gleich.

Je länger nun die Basis CQ des Rektangels genommen wird, desto kleiner wird die Höhe QE; und da die Basis ohne Ende verlängert werden kann, so wird zugleich die Höhe ohne Ende immer kleiner. Das heißt, die Linie CO kömmt der Hyperbel AE immer näher und näher, kann aber dieselbe nie berühren, weil sonst QE oder y zu nichts werden müste, welches nicht geschehen kann, da dann das Rektangel xy nicht mehr Statt fände.

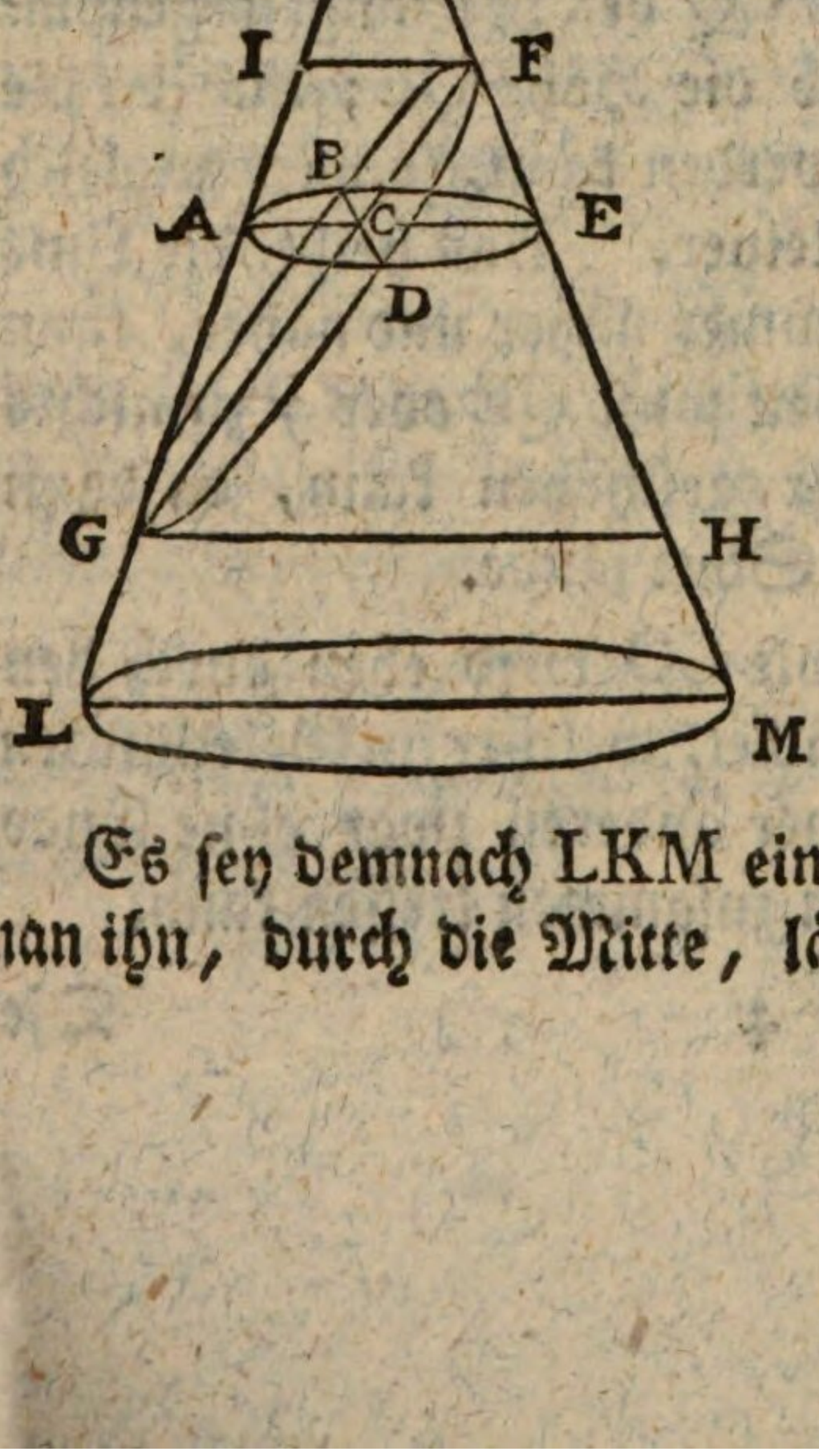
Diese Eigenschaft der Linie CO wird eben durch den Namen Asymptote ausgedrücket, welcher im Griechischen eine Linie anzeiget, die sich einer anderen zwar ohne Ende nähern, aber nie mit derselben zusammen treffen kann.

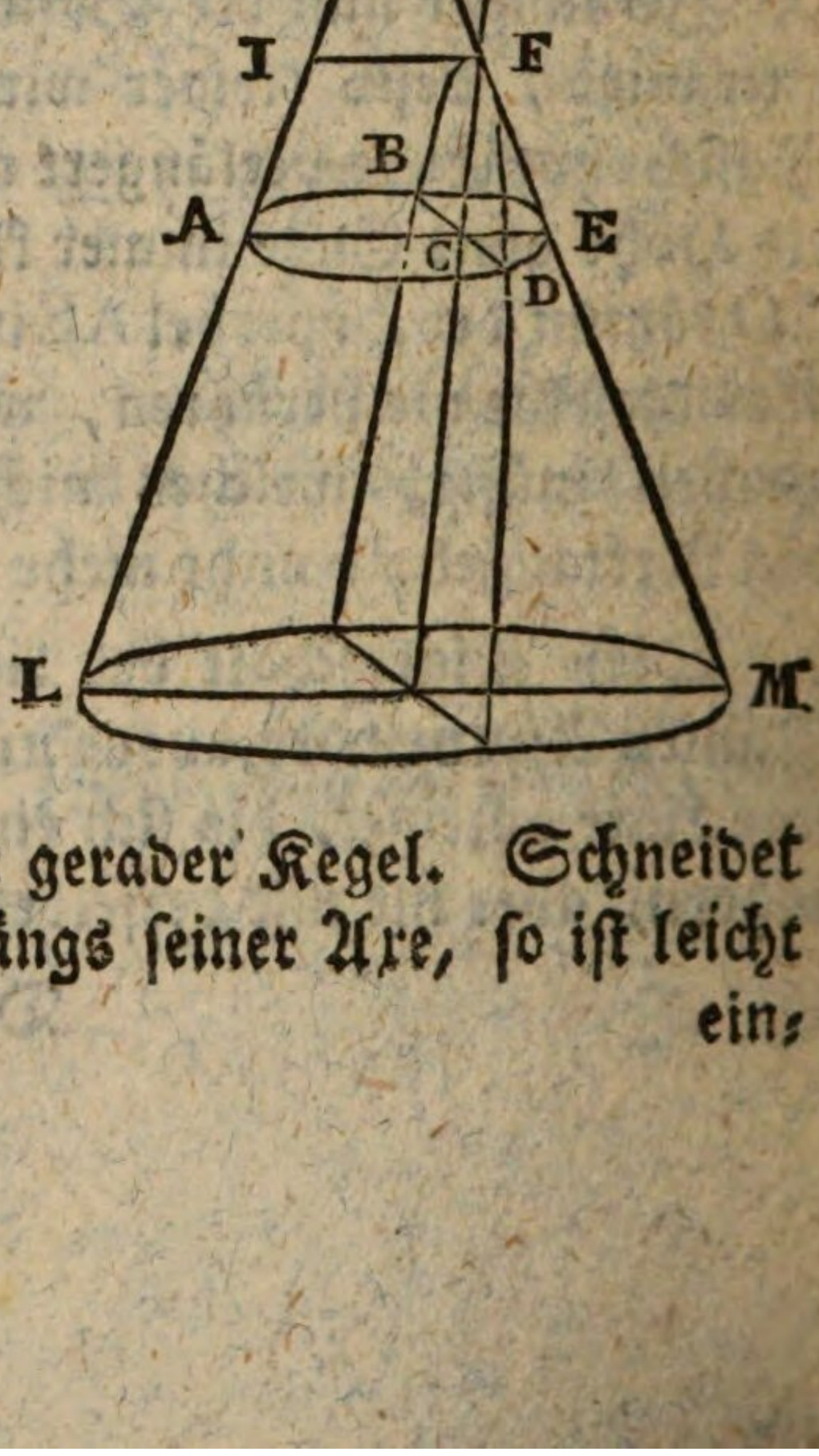
Die Hyperbel, wenn man ihre Abzissen einer ihrer Asymptoten und die Applikaten der anderen Asymptote parallel machet, wird deswegen die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten genannt.

§. 34.

Wenn man einen geraden Kegel vermittelst einer Ebne schneidet, so bildet der Schnitt entweder ein Dreieck, oder einen Zirkel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel. oder eine Parabel.

Beweis. Obgleich dieser Satz sich auch, unter gewissen Bedingungen, von schiefen Kegeln behaupten läßt, so wollen wir, um mehrerer Deutlichkeit willen, uns bloß an dem geraden Kegel halten.





Es sey demnach LKM ein gerader Kegel. Schneidet man ihn, durch die Mitte, längs seiner Axe, so ist leicht ein;

einzusehen, daß der Schnitt ein Dreieck LKM bildet. Schneidet man den Kegel vermittelst einer Ebne, die mit der Grundfläche parallel sey, so ist es ebenfalls nicht schwer einzusehen, daß der Schnitt ein Zirkel sey, welches auch in der gemeinen Geometrie bewiesen wird. Es bleibt also übrig, zu wissen, was der Schnitt seyn wird, wenn man den Kegel auf eine andere Art schneidet, z. E. längs der geraden Linie FC, welche beide Seiten KM und KL des Kegels in F und in G trift (in der zweiten Figur müssen KM und KL über den Scheitel K hinaus verlängert werden). Auch wird angenommen, daß die scheidende Ebne senkrecht sey auf der Ebne des Dreiecks LKM. Es sey der Umfang des Schnittes, oder ein Theil desselben BFD. Ziehe GH und IF, jede parallel mit AE, dem Durchmesser des Zirkels ABE, welcher Zirkel selbst mit der Grundfläche parallel ist, und von der Ebne BFD in BD geschnitten wird. Es sey $FI = \alpha$, $GH = \beta$, $FG = \gamma$. Es sey $FC = x$, und $CB = y$. Die ähnlichen Dreiecke FCE, FGH geben

FG, GH :: FC, CE

$$\gamma, \quad \beta :: x, \quad CE \left(= \frac{\beta x}{\gamma} \right)$$

Ferner sind die Dreiecke GFI, GCA ähnlich, also ist

GF, FI :: GC, AC

$$\gamma, \alpha :: (\gamma \overline{+} x), AC \left(= \frac{\alpha\gamma \overline{+} \alpha x}{\gamma} = \alpha \overline{+} \frac{\alpha x}{\gamma} \right)$$

Man merke daß $GC = \gamma - x$ in der ersten Figur, und $GC = \gamma + x$ in der zweiten Figur.

Weil die Ebnen ABE, BFD beide auf der Ebne des Dreiecks LKM senkrecht sind, so ist ihr Durchschnitt BD auf dem nemlichen Dreiecke senkrecht, folglich auch auf der Linie AE die in der Ebne des Dreiecks lieget und durch den Fuß C der BC gehet. Also ist im Zirkel ABE die BC senkrecht auf dem Durchmesser AE. Folglich ist, zufolge der Natur des Zirkels,

$$BC^2 = CE \times AC$$

$$y^2 = \frac{\beta x}{\gamma} \times \left(\alpha \mp \frac{\alpha x}{\gamma}\right)$$

$$y^2 = \frac{\alpha\beta}{\gamma} x \mp \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} x^2$$

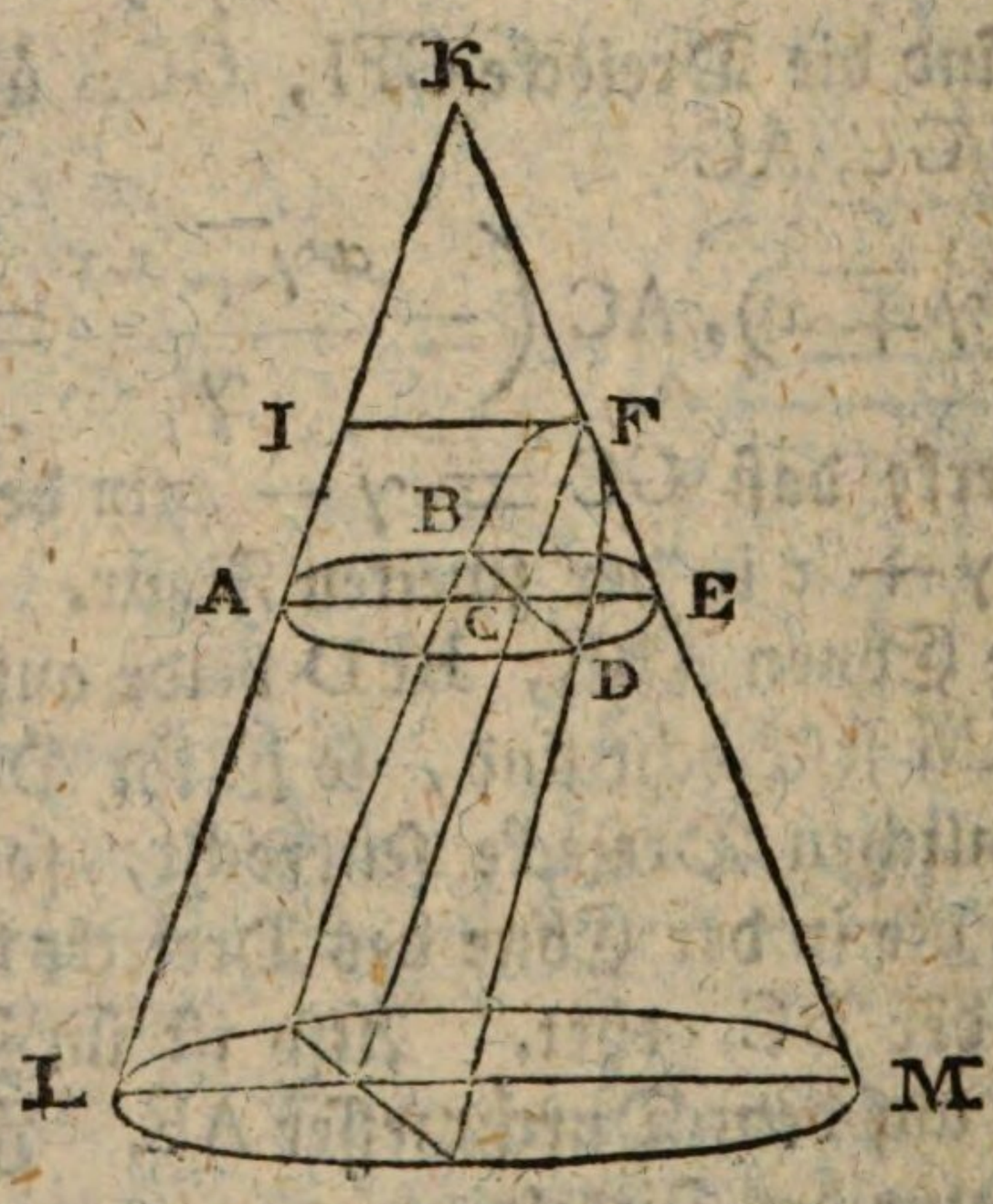
Es sey $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = n$, so ist $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = \frac{n}{\gamma}$, und die Gleichung bekömmt folgende Gestalt

$$y^2 = nx \mp \frac{n}{\gamma} x^2$$

oder [illegible] $\frac{n}{\gamma}$ [illegible] x^2)

welche Gleichung die Natur der Ellipse und der Hyperbel ausdrücket. Das Zeichen — ist für die Ellipse und das Zeichen + für die Hyperbel.

Wenn also der Schnitt schief durch den Kegel gehet, so daß er beide Seiten desselben trift, so ist er eine Ellipse. Gehet aber der Schnitt so, daß er nicht beide Seiten sondern nur die eine und die Verlängerung der andern über den Scheitel trift, so ist es eine Hyperbel.



Nun

Nun bleibt noch der Fall übrig, wo der Schnitt FC mit der einen Seite KL des Kegels parallel ist, und folglich weder diese Seite noch ihre Verlängerung treffen kann.

Gesetzt, es verhalte sich die Seite KL des Kegels zum Durchmesser LM der Basis, wie γ zu β, wo γ und β Zahlen oder Linien vorstellen können. Nun ist, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke KLM, FCE, die aus parallelen Linien bestehen,

$$\text{KL, LM} :: \text{FC, CE}$$

$$\gamma,\ \beta :: x,\ \text{CE}\left(= \frac{\beta x}{\gamma}\right)$$

Ferner ist $\text{AC} = \text{IF} = a$.

Weiter ist $\text{BC}^2 = \text{AC} \times \text{CE}$

$$y^2 = a \cdot \frac{\beta x}{\gamma}$$

$$y^2 = \frac{a\beta}{\gamma}\, x$$

Welches die Gleichung einer Parabel ist, welche $\frac{a\beta}{\gamma}$ zum Parameter hat; nemlich wenn der Parameter $p = \frac{a\beta}{\gamma}$, so ist $y^2 = px$

Dieser Parameter wird demnach gefunden, wenn man zu KL, LM und IF die vierte Proporzionallinie suchet; oder, weil KL zu LM sich verhält, wie KI zu IF, so ist auch der Parameter die dritte Proporzionallinie zu KI und IF.

Zusatz. Man pfleget die krummen Linien, die in einem geschnittenen Kegel entstehen, Kegelschnitte zu nennen. Diese sind also der Zirkel, die Ellipse, die Hyper-

perbel und die Parabel, ob gleich der Zirkel nicht unter dieser Benennung begriffen zu werden pfleget. Man kann sie alle vier durch diese einzige Gleichung vorstellen:

$$yy = px \mp \frac{p}{a} x^2$$

Das Zeichen — ist hier für die Ellipse und + für die Hyperbel, p ist der Parameter und a die Haupt-Axe.

Der Zirkel ist eine Art von gleichseitiger Ellipse, worin die große Axe, die kleine Axe und der Parameter alle drei gleich sind. Wird demnach in der Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$, angenommen, daß $p = a$ sey, so bekömmt man $y^2 = ax - x^2$ für den Zirkel, welches seine Richtigkeit hat.

In der gleichseitigen Hyperbel wird auch $p = a$, also $y^2 = ax + x^2$. Siehe §. 29.

Je länger die Haupt-Axe der Ellipse oder Hyperbel wird, desto mehr nähert sie sich der Parabel. Denn wenn p unverändert bleibet, und a immer grösser wird, so nähert sich der Bruch $\frac{p}{a}$ je mehr und mehr dem nichts. Die Gränze der Gleichung

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2$$

ist demnach $y^2 = px \mp 0.\ x^2$

oder $y^2 = px$

welches eine Parabel ausdrücket; folglich ist die Parabel die Gränze aller Ellipsen oder Hyperbeln die den nemlichen Parameter als die Parabel haben, und deren Haupt-Axe so viel als man will zunimmt. Oder, wenn man mit

den

den Mathematikern kurz reden will, so kann man sagen, die Parabel sey eine Ellipse oder Hyperbel mit einer unendlichen Haupt-Axe.

Zusatz II. Die Ellipse und Hyperbel können ebenfalls unter dieser allgemeinen Gleichung begriffen werden

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (\pm \tfrac{1}{4} a^2 \mp x^2)$$

wenn man nemlich aus dem Mittelpunkte ausgehet, und die Abzissen auf der Haupt-Axe nimmt. Die Haupt-Axe ist a, und b die zweite. Hier ist $+\frac{1}{4}a^2 - x^2$ für die Ellipse, hingegen $-\frac{1}{4}a^2 + x^2$ oder $x^2 - \frac{1}{4}a^2$ für die Hyperbel. Wenn $b = a$ wird, so ist

$$y^2 = \pm \tfrac{1}{4} a^2 \mp x^2$$

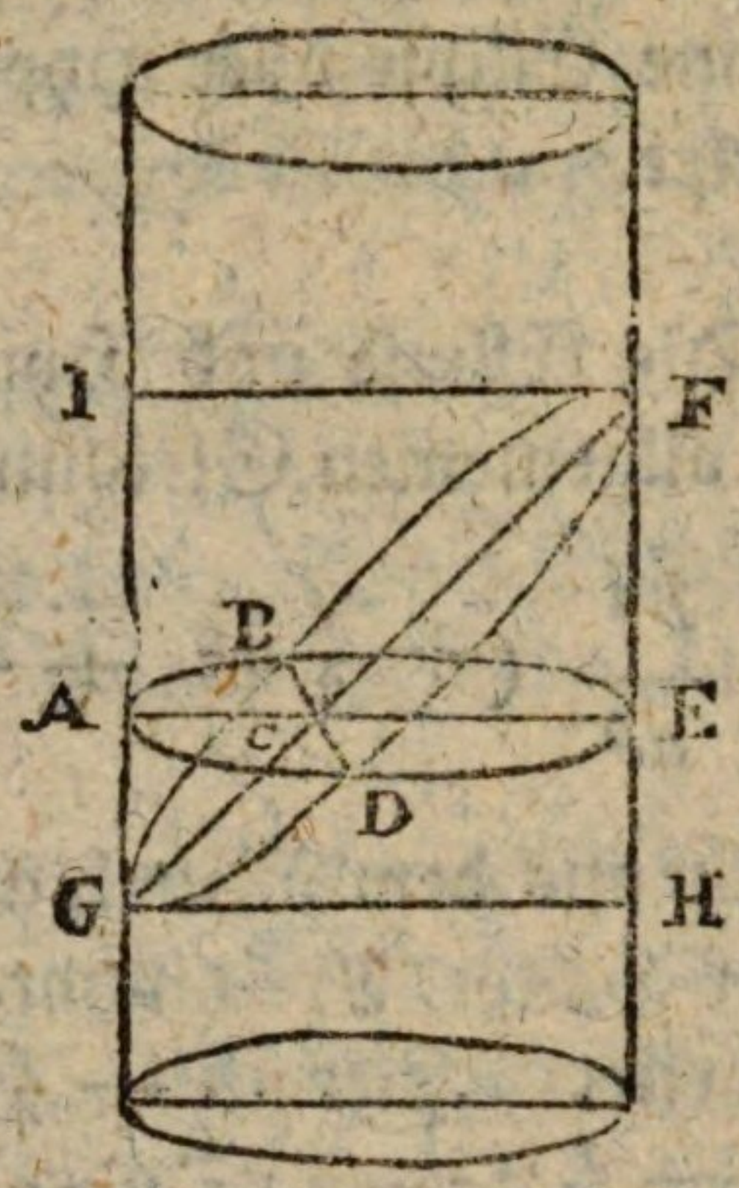
wo die oberen Zeichen für den Zirkel und die unteren für die gleichseitige Hyperbel sind.

§. 35.

Wenn ein gerader Zylinder vermittelst einer Ebne geschnitten wird, so ist der Schnitt, entweder ein Parallelogramm, oder ein Zirkel, oder eine Ellipse.

Wir halten uns am geraden Zylinder, wie vorhin am geraden Kegel. Gehet der Schnitt mit der Axe parallel, so entstehet ein Parallelogramm, welches leicht einzusehen ist. Gehet der Schnitt mit der Grundfläche parallel, so bekömmt man einen Zirkel. Gehet der Schnitt aber schief durch den Zylinder, so kann nichts anders als eine Ellipse entstehen.

Siehe die folgende Figur.



Der Beweis und die Figur sind wie bei dem Kegel, nur ist hier GH = IF. Es sey IF = GH = α, FG = γ, FC = x, BC = y. So ist

FG, GH :: FC, CE

$$\gamma, \alpha :: x, \text{CE} \left(= \frac{\alpha x}{\gamma}\right)$$

GF, FI :: GC, AC

$$\gamma, \alpha :: (\gamma - x), \text{AC} \left(= \alpha - \frac{\alpha x}{\gamma}\right)$$

Ferner $(BC)^2 = AC \times CE$

$$y^2 = \left(\alpha - \frac{\alpha x}{\gamma}\right) \times \frac{\alpha x}{\gamma}$$

$$y^2 = \frac{\alpha^2}{\gamma} x - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} x^2$$

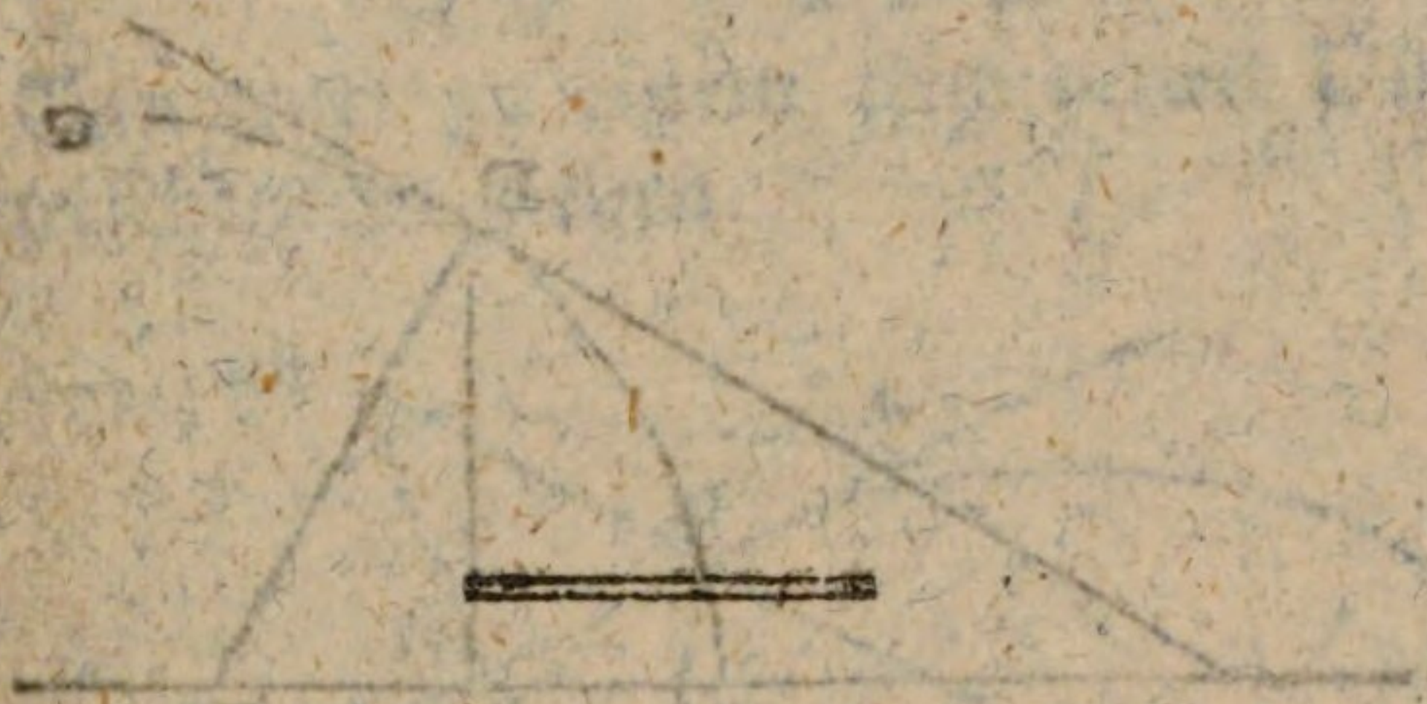
Es sey $\frac{\alpha^2}{\gamma} = n$, so ist $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{n}{\gamma}$, folglich

$$y^2 = nx - \frac{n}{\gamma} x^2$$

oder $$y^2 = \frac{n}{\gamma} (\gamma x - x^2)$$

welche Gleichung eine Ellipse anzeiget.

Anmerkung. Weil die Schnitte des Zylinders, außer dem Zirkel, keine andere krumme Linien geben als Ellipsen, so betrachtet man lieber die Schnitte des Kegels, welche mannigfaltiger sind, indem sie nicht nur Ellipsen, sondern auch Hyperbeln und Parabeln geben.

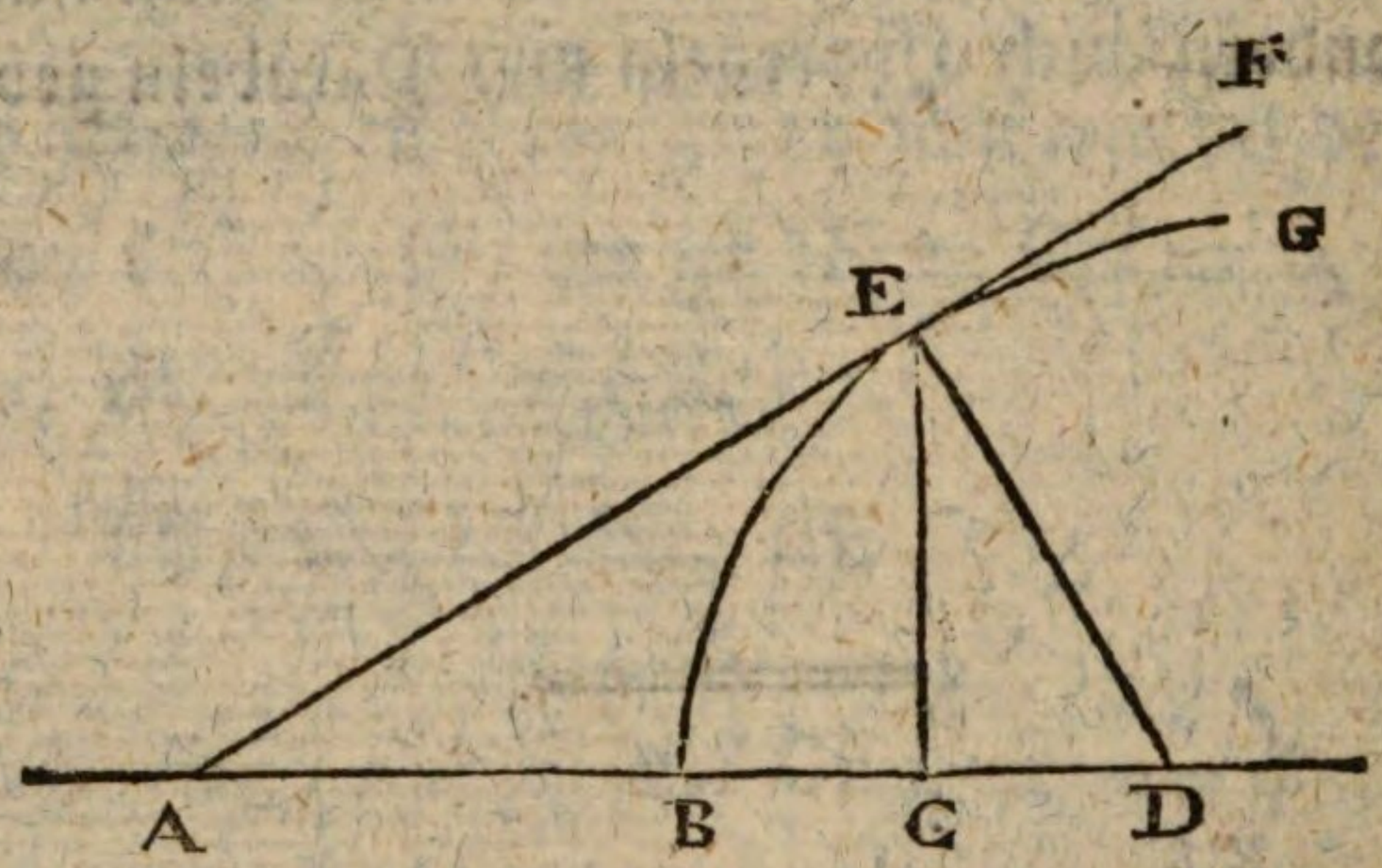


Zweytes Hauptstück.

Von den Tangenten der Kegelschnitte.

§. 1.

Eine Tangente ist eine gerade Linie AF, welche eine krumme BEG in einem einzigen Punkte E trift, so daß es nicht möglich sey, zwischen der geraden und der krum-



men durch den Punkt E eine andere gerade zu ziehen, ohne daß sie die krumme noch in einem andern Punkte schneide. In einem engeren Verstande ist die Tangente der Theil AE der berührenden Linie, welcher zwischen dem berührten Punkte E und der Direktrisse AD lieget; und so muß man allemal dieses Wort verstehen, wenn der Tangente eine bestimmte Größe beigeleget wird.

Es sey EC die Applikate für den Punkt E, wo die krumme Linie von der Tangente getroffen wird, so wird der Theil AC der Direktrisse, der zwischen der Applikate und der Tangente liegt, die Subtangente genannt.

Es

Es sey ED im Punkte E auf der Tangente AE senkrecht errichtet, und bis zur Direktrize verlängert, so heißt diese ED die Normal-Linie für den Punkt E.

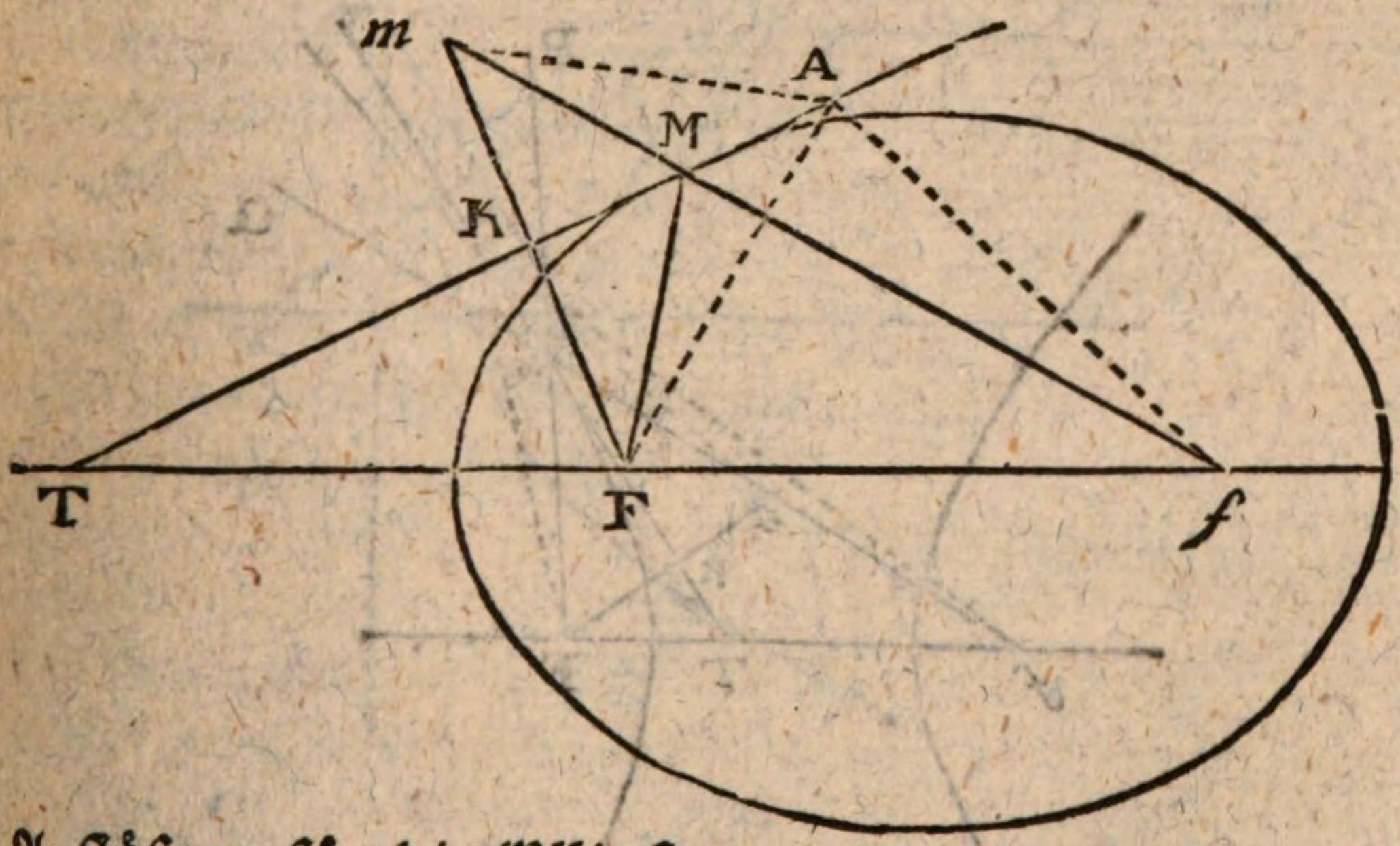
Der Theil CD der Direktrize, zwischen der Applikate und der Normallinie, wird die Subnormallinie genannt.

Zusatz. Weil die Tangente nahe am Berührungs-Punkte fast mit der krummen Linien einerlei ist, so wird oft von dieser gesagt, was eigentlich von jener verstanden werden muß. Z E. Man saget die Normal-Linie ED sey auf der krummen Linie senkrecht in E. Der vermischtlinichte Winkel CEB wird in der Gegend von E dem Winkel CEA gleich geachtet.

§. 2.

Aufgabe.

Die Tangente zu einem gegebenen Punkte eines Regelschnittes ziehen.



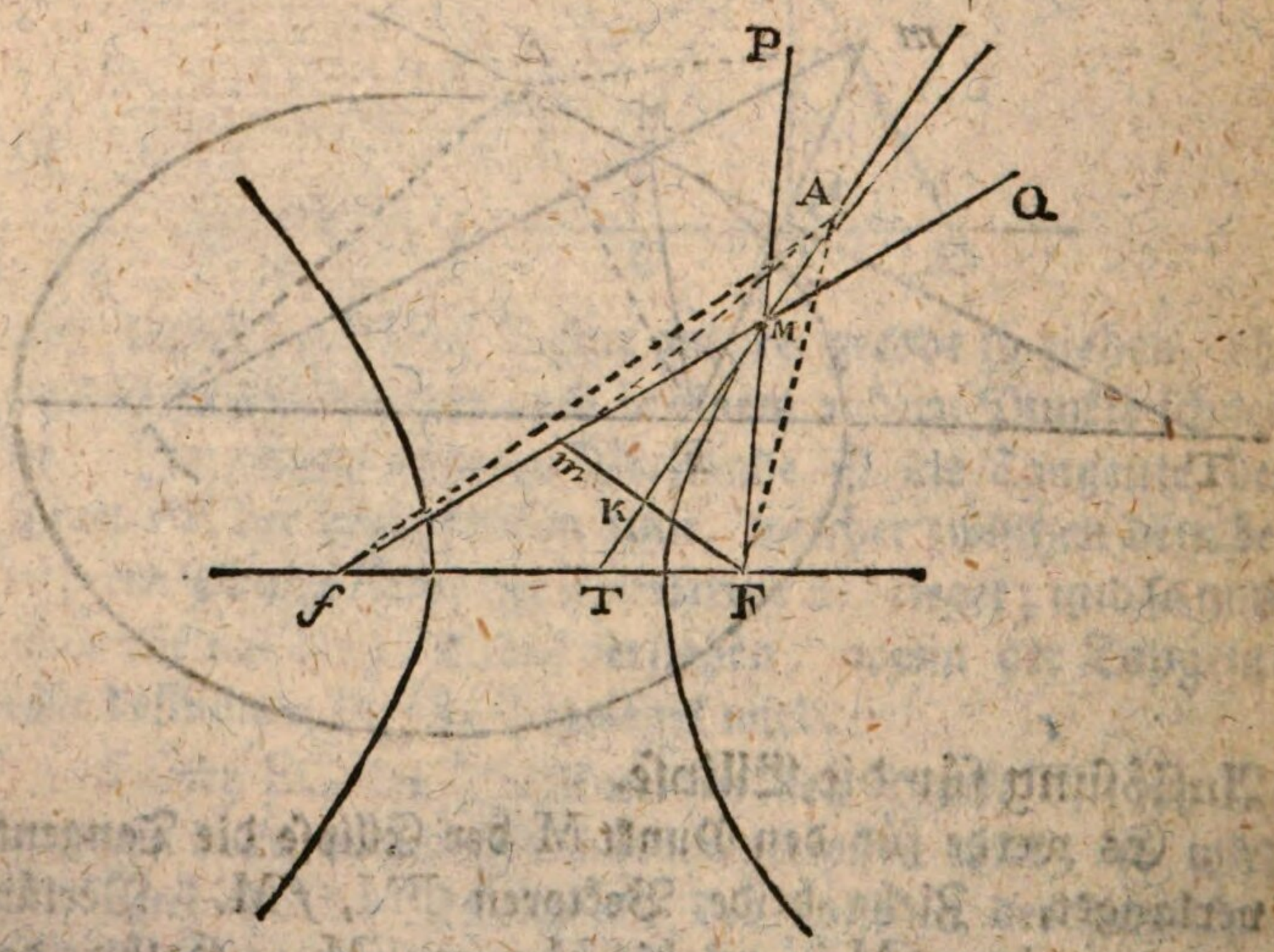
Auflösung für die Ellipse.

Es werde für den Punkt M der Ellipse die Tangente verlanget. Ziehe beide Vektoren FM, fM. Verlängere den einen fM in m, bis Mm = FM. Halbire den Winkel mMF vermöge der geraden Linie MT, so ist die-

diese die verlangte Tangente. Oder ziehe mF, halbire mF in K, und ziehe die Tangente durch die Punkte M und K.

In beiden Fällen entstehen zwei ähnlichgleiche Dreiecke MKF, mKM. Nimmt man in der Linie MT einen anderen beliebigen Punkt A, und ziehet Am, AF, Af, so hat man wiederum zwei ähnlichgleiche Dreiecke AKm, AKF und AF = Am. Nun ist im Dreiecke fAm die $f$$m$ kleiner als fA + Am, oder fM + Mm ist kleiner als fA + Am. Setzet man MF anstatt Mm, und AF anstatt Am, so folget, daß fM + MF kleiner ist als fA + AF. Also kann der Punkt A nicht in dem Umfange der Ellipse liegen, weil sonst die Summe fA + AF der Summe fM + Mf gleich seyn müste. Und da dieses von jedem Punkte in der Linie MT gilt, so berühret diese MT die Ellipse nur im einzigen Punkte M.

Für die Hyperbel.



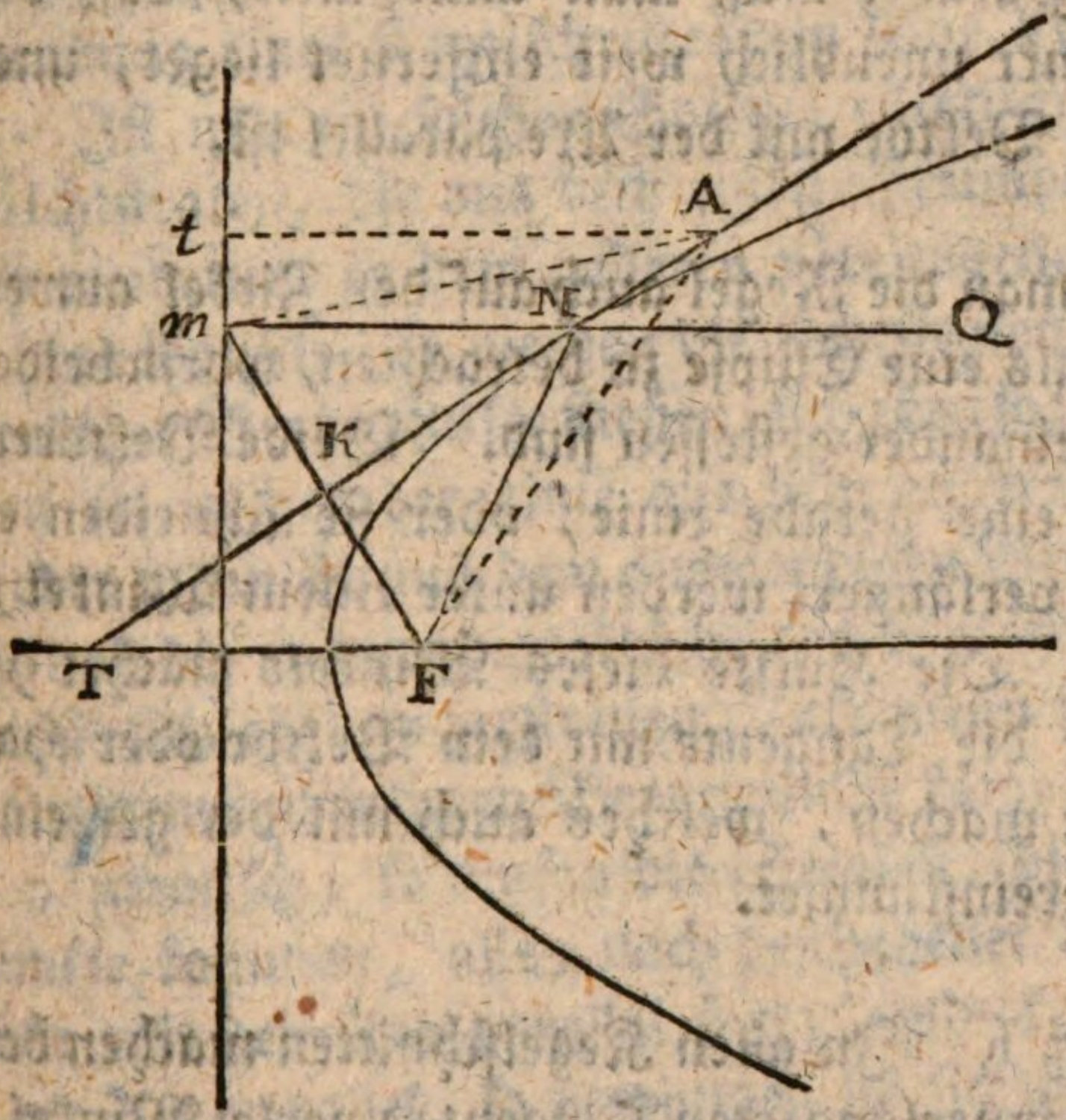
Ziehe ebenfalls nach dem Punkte M der Hyperbel die Vektoren FM, fM. Vom größeren Vektor fM nimm ab

Mm

$Mm = FM$. Halbire wie vorher den Winkel FMm, oder ziehe Fm, halbire dieselbe in K und ziehe die MT durch M und K. So ist MT die Tangente.

Denn, aus einem anderen Punkte A der MT ziehe AF, Am, Af. So ist $fA < mA + mf$, folglich $fA - mA < mf$, oder, weil $mA = AF$, so ist $fA - AF < mf$. Es ist aber $mf = fM - mM = fM - MF$. Also ist $fA - AF < fM - MF$. Folglich gehöret der Punkt A nicht zur Hyperbel, als in welcher die Differenz der Vektoren allemal einerlei seyn muß. Folglich berührt MT die Hyperbel nur im einzigen Punkte M.

Für die Parabel.



Es sey tm die Direktrize der Parabel. Aus dem Punkte M ziehe den Vektor MF und Mm senkrecht auf der Direktrize. Halbire den Winkel FMm, oder ziehe mF und halbire diese in K. So bekömmst du wie vorher die Tangente MT.

Zum Beweise, nimm in der Linie MT einen anderen Punkt A, ziehe AF, A*m*, und A*t* senkrecht über der Direktrixe. So ist A*m* größer als A*t*, oder weil A*m* = AF, so ist AF größer als A*t*. Folglich gehöret der Punkt A nicht zur Parabel, als in welcher jeder Punkt eben so weit vom Brennpunkte als von der Direktrixe liegen muß. Daher berühret MT die Parabel nur in M.

Für alle drei Kegelschnitte. Aus vorigen besonderen Auflösungen läßt sich diese allgemeine Regel folgern. Man ziehe beide Vektoren für den gegebenen Punkt, und verlängere sie nöthigen Falls. Man halbire den Winkel, in welchem die krumme Linie lieget; so ist die gerade Linie, die den Winkel halbiret, zugleich die verlangte Tangente. In der Parabel muß man annehmen, daß der andere Brennpunkt unendlich weit entfernet lieget, und folglich der zweite Vektor mit der Axe parallel ist.

Will man die Regel auch auf den Zirkel anwenden, so ist dieser als eine Ellipse zu betrachten, worin beide Brennpunkte in einander geflossen sind. Beide Vektoren machen also nur eine gerade Linie, oder sie schneiden einander, wenn sie verlängert werden unter einem Winkel von 180 Graden. Die Hälfte dieses Winkels machet 90 Grad. Also muß die Tangente mit dem Vektor oder Halbmesser 90 Grade machen, welches auch mit der gemeinen Geometrie übereinstimmet.

Zusatz I. In allen Kegelschnitten machen beide Vektoren mit der verlängerten Tangente einerlei Winkel. Denn in obiger Figur für die Ellipse ist $\angle fMA = \angle KMm$, als Wechselwinkel. Ferner ist, vermöge der Konstrukzion $\angle KMm = \angle KMF$. Also ist $\angle AMf = \angle KMF$.

Aus gleichen Gründen sind in der Hyperbel, wenn man die Vektoren verlängert, alle vier Winkel *m*MK, FMK

FMK, PMA, QMA einander gleich. In der Parabel, wenn man *m*M nach Q verlängert, oder MQ mit der Axe parallel ziehet, so ist ∠ AMQ = ∠ *m*MK = ∠ KMF, und hier kann MQ als ein Theil des größeren Vektors betrachtet werden, welcher ins Unendliche fortgehet. Im Zirkel ist ohnedas bekannt, daß der Radius, welcher beide vereinigte Vektoren vorstellet, beiderseits mit der Tangente rechte Winkel machet.

Zusatz II. Es wird in der Katoptrik gelehret, daß jeder Lichtstral, der eine Fläche trift, von derselben so zurückprallet, daß er einen Reflexions-Winkel machet, der dem Einfalls-Winkel gleich ist. Bei krummen Flächen werden diese Winkel durch die Tangente bestimmt. Man bilde sich also solche Brennspiegel ein, deren Flächen durch die Umwendung eines Kegelschrittes um seine Axe entstanden sind. Ist nun ein solcher Spiegel elliptisch, so werden alle Lichtstralen, die aus dem einen Brennpunkte fließen, sich wiederum in dem anderen vereinigen. Ist der Spiegel hyperbolisch, so werden die Lichtstralen, die aus dem inwendigen Brennpunkte fließen, sich eben so zerstreuen, als kämen sie in gerader Linie aus dem anderen Brennpunkte; oder wenn sie aus dem auswendigen Brennpunkte kommen, und die auswendige Fläche des Spiegels treffen, so werden sie sich eben so zerstreuen, als wenn sie gerades Weges aus dem inwendigen Brennpunkte kämen. Ist der Spiegel parabolisch, so laufen die Stralen, die aus dem Brennpunkte kommen, alle, nach geschehener Reflexion, ohne Ende mit der Axe parallel fort; und kommen sie alle mit der Axe parallel, so vereinigen sie sich im Brennpunkte. Ist der Spiegel zirkelförmig, das heißt, bildet er eine Kugelfläche oder einen Theil derselben, so müssen alle Stralen, die aus dem Mittelpunkte kommen, sich auch wieder in dem Mittelpunkte vereinigen, welcher hier als der Brennpunkt angesehen wird.

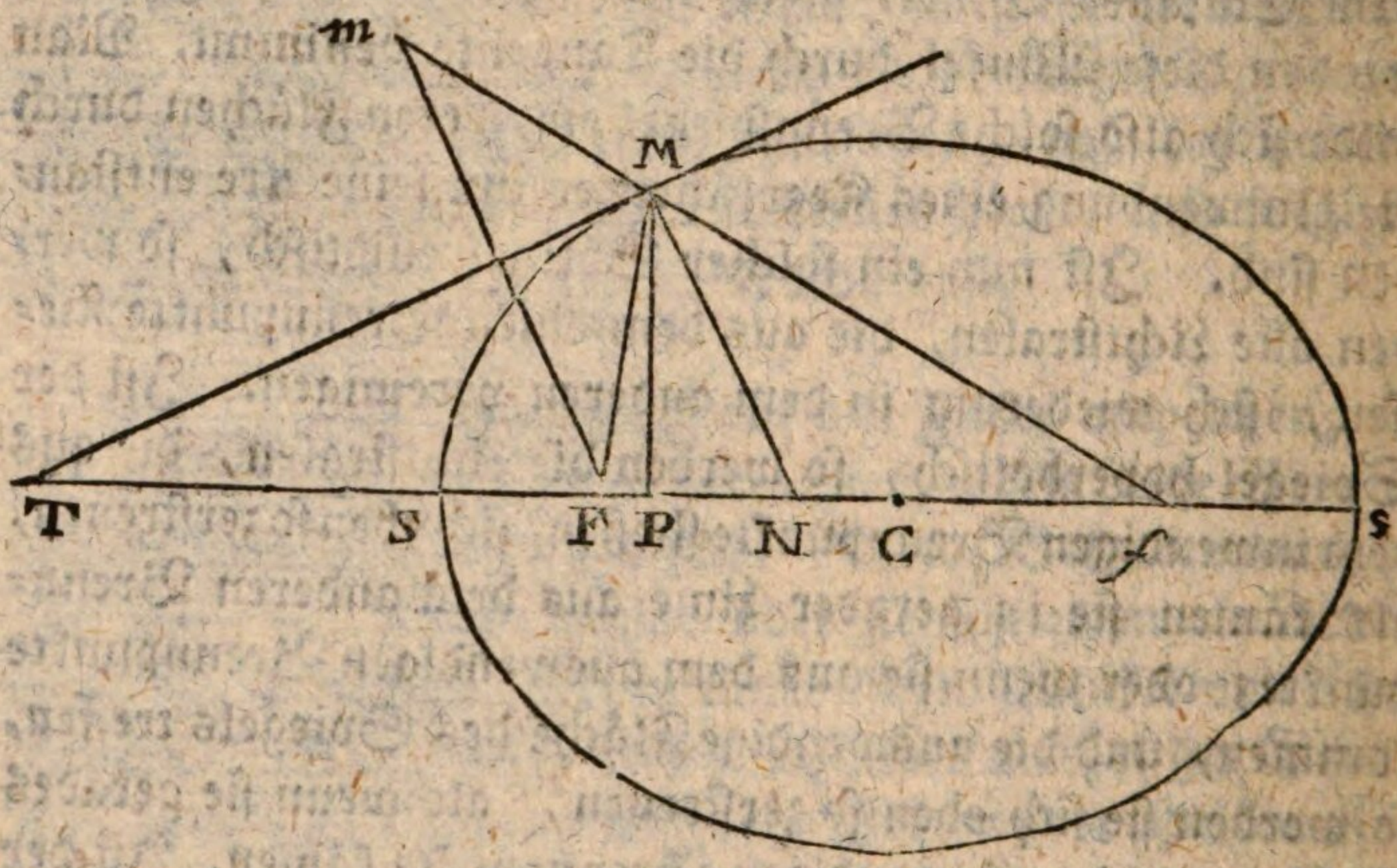
Daher ist deutlich einzusehen, woher die Brennpunkte in den Kegelschnitten ihren Namen bekommen haben, und um dieser Erklärung willen haben wir dieses wenige aus der Katroptrik hier beigefüget.

§. 3.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Abzisse soll in jedem Kegelschnitte die Subnormallinie berechnet werden.

Auflösung für die Ellipse.



Es sey PM eine Applikate, MT die Tangente für den Punkt M, MN sey die Normale, welche auf MT senkrecht ist, so ist PN die Subnormale, hingegen ist PT die Subtangente.

Um die Tangente MT zu ziehen, wird, wie oben gelehret worden, FM bis nach *m* verlängert, so daß M*m* = MF, und der Winkel *m*MF wird durch die gerade MT halbiret, welche zur Tangente wird. Vermöge dieser Konstruktion wird *m*F senkrecht auf MT, folglich ist *m*F parallel mit

MN, und die Dreiecke fMN, fmF sind ähnlich. Folglich ist

$$fm,\ f\text{F} :: \text{M}m,\ \text{FN}$$
$$\text{oder}\quad fm,\ f\text{F} :: \text{MF},\ \text{FN}$$

Wir müssen die algebraischen Werthe der Linien fm, fF, MF suchen.

fm und fF machen keine Schwierigkeit; denn wenn wir die halbe Haupt-Axe mit a und die Ekzentrizität mit e bezeichnen, so ist

$$fm = f\text{M} + \text{MF} = sS = 2a$$
$$f\text{F} = 2\,\text{CF} = 2e$$

Hingegen siehet man nicht sogleich den algebraischen Werth von FM. Um ihn zu finden erinnere man sich aus der Trigonometrie, daß, da im Dreieck fMF der Perpendikel MP auf die Basis fF fällt, folgende Proporzion entstehe:

$$f\text{F},\ (f\text{M} + \text{MF}) :: (f\text{M} - \text{MF}),\ (f\text{P} - \text{PF})$$
$$\text{oder}\ (f\text{M} + \text{MF}),\ f\text{F} :: (f\text{P} - \text{PF}),\ (f\text{M} - \text{MF})$$

hier ist $f\text{M} + \text{MF} = 2a$, $f\text{F} = 2e$, $f\text{P} - \text{PF}$ . . . .

$= (f\text{F} - \text{PF}) - \text{PF} = f\text{F} - 2\,\text{PF} = 2\,\text{CF} - 2\,\text{PF}$

$= 2(\text{CF} - \text{PF}) = 2\,\text{CP}$. Rechnen wir nun die Abzissen aus dem Mittelpunkt C, so ist $\text{CP} = x$, folglich $2\,\text{CP} = 2x$. Setzet man diese Werthe in die lezt gefundene Proporzion, so hat man

$$2a,\ 2e :: 2x,\ (\text{FM} - \text{MF})$$

$$\text{Daher}\quad f\text{M} - \text{MF} = \frac{2ex}{a}$$

$$\text{Nun ist}\quad f\text{M} + \text{MF} = 2a$$

$$\text{daher}\quad \text{MF} = a - \frac{ex}{a}$$

Da nun auch der Werth vom MF gefunden worden, so kehren wir zu unserer ersten Proporzion zurück, nemlich

$$fM, fF :: MF, FN$$

$$2a, 2c :: \left(a - \frac{ex}{a}\right), FN$$

oder $$a, e :: \left(a - \frac{ex}{a}\right), FN$$

Daher $$FN = e - \frac{e^2 x}{a^2}$$

Nun ist PN = NF — PF, und PF = CF — CP, also PN = NF — CF + CP = NF — $e + x$,

daher $$PN = \left(e - \frac{e^2 x}{a^2}\right) - e + x$$

$$PN = x - \frac{e^2 x}{a^2}$$

oder $$PN = \frac{(a^2 - e^2)\, x}{a^2}$$

oder $$PN = \frac{(a + e)\ (a - e)}{a^2} \cdot x$$

Es ist aber $(a + e)(a - e)$ das Rektangel aus beiden Apsiden, welches dem Quadrate der halben kleinen Axe gleich ist (H. I. §. 16). Wird demnach die halbe kleine Axe b genannt, so ist $NP = \frac{b^2}{a^2}\, x$

Will man die Abzissen nicht aus dem Mittelpunkte, sondern vom Scheitel an rechnen, so sey $SP = x'$. Nun ist $SP + CP = x' + x = a$, also $x = a - x'$, folglich

$$NP = \frac{b^2}{a^2}\,(a - x')$$

oder $$NP = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2}\, x'$$

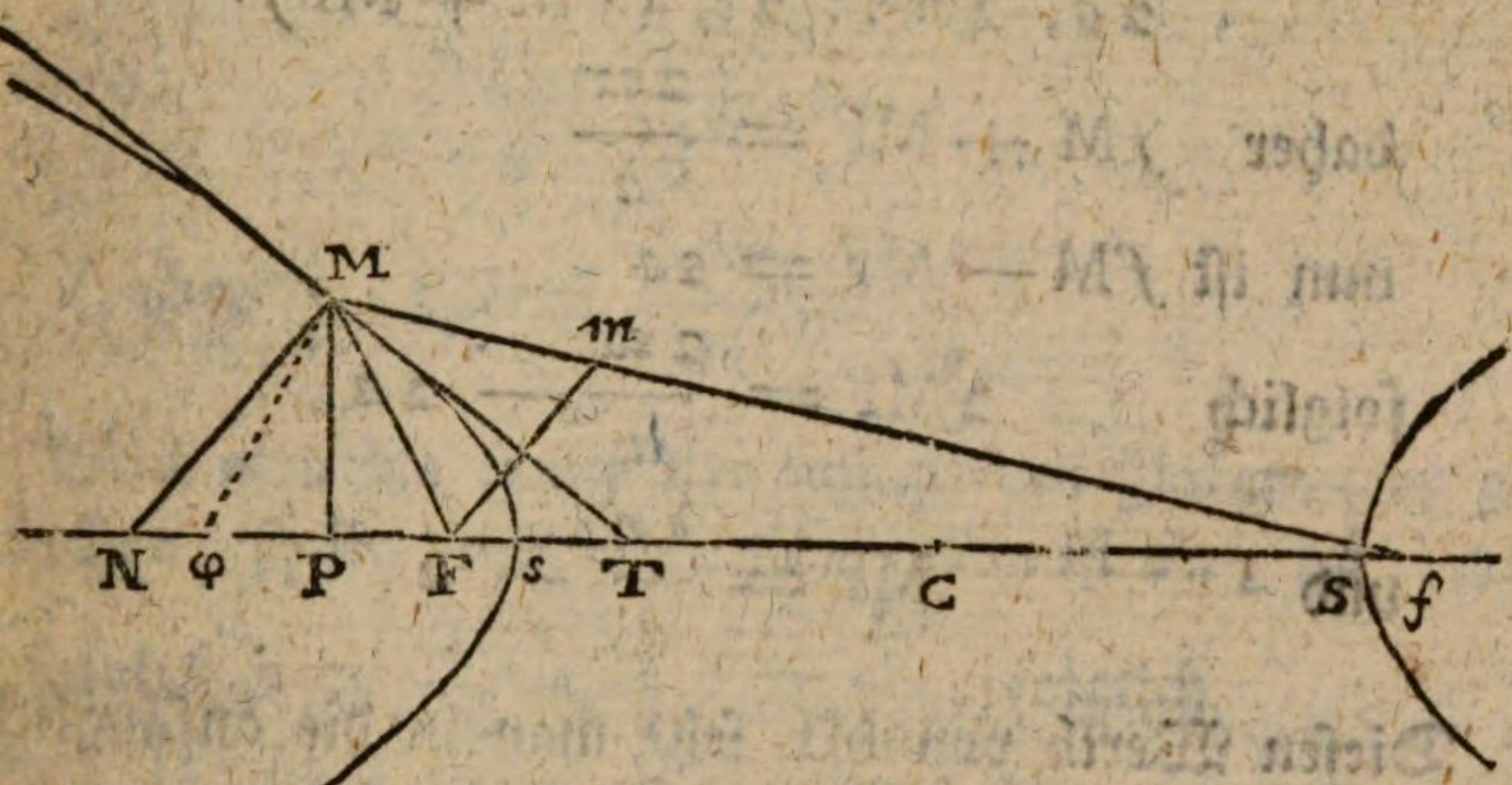
Will

Will man anstatt der kleinen Axe den Parameter p gebrauchen, so ist $2a, 2b :: 2b, p$, folglich $4b^2 = 2ap$, oder $2b^2 = ap$, oder $b^2 = \frac{1}{2}ap$, also wird

$$NP = \frac{1}{2}p - \frac{\frac{1}{2}p}{a}x'$$

oder $$NP = \frac{1}{2}p - \frac{px'}{2a}$$

Für die Hyperbel.



Da hier, wie bei der Ellipse, Fm auf der Tangente MT senkrecht stehet, so ist Fm mit der Normal-Linie MN parallel, und die Dreiecke fmF, fMN sind ähnlich, folglich ist $fm, fF :: Mm, NF$
oder $fm, fF :: FM, NF$

Laßt uns die algebraischen Werthe der Linien fm, fF, FM suchen. Wenn die halbe Axe $= a$, und die Ekzentrizität $= e$, so ist

$$fm = fM - MF = sS = 2a$$
$$fF = 2e$$

Um FM zu finden, so mache $P\varphi = PF$, und ziehe $M\varphi$, so wird $M\varphi = MF$. Nun fällt im Dreiecke $fM\varphi$,

der Perpendikel MP auf die Grundlinie $f\Phi$, folglich verhält sich $f\Phi$, $(fM + M\Phi)$ :: $(fM - M\Phi)$, $(fP - P\Phi)$ oder $(fM - M\Phi)$, $f\Phi$ :: $(fP - P\Phi)$, $(fM + M\Phi)$ oder $(fM - MF)$, $(fF + 2PF)$ :: fF, $(fM + MF)$

Hier ist $fM - MF = 2a$, $fF = 2e$.

Ferner $fF + 2PF = 2CF + 2PF = 2(CF + PF) = 2CP$. Werden nun die Abzissen vom Mittelpunkte C an gerechnet, so ist $CP = x$, und $2CP = 2x$, folglich ist

$$2a,\ 2x :: 2e,\ (fM + MF)$$

$$\text{daher}\quad fM + MF = \frac{2ex}{a}$$

$$\text{nun ist}\quad fM - MF = 2a$$

$$\text{folglich}\quad 2MF = \frac{2ex}{a} - 2a$$

$$\text{und}\quad MF = \frac{ex}{a} - a$$

Diesen Werth von MF setze man in die anfängliche Proporzion fm, fF :: MF, NF

$$\text{so wird}\quad 2a,\ 2e :: \left(\frac{ex}{a} - a\right),\ NF$$

$$a,\ e :: \left(\frac{ex}{a} - a\right),\ NF$$

$$\text{daher}\quad NF = \frac{e^2x}{a^2} - e$$

Nun ist $PN = NF - PF$, und $PF = CP - CF$, daher $PN = NF - CP + CF = NF - x + e$,

$$\text{Also ist}\quad PN = \left(\frac{e^2x}{a^2} - e\right) - x + e$$

$$\text{oder}\quad PN = \frac{e^2x}{a^2} - x$$

oder $PN = \frac{(e^2 - a^2)\,x}{a^2}$

oder $PN = \frac{(e + a)\,(e - a)}{a^2}\,x$

Nun ist in der Hyperbel $(e + a)\,(e - a)$ das Rektangel aus beiden Apsiden. Dieses aber ist gleich dem Rektangel aus dem halben Parameter und der halben Haupt-Axe. (I. H. §. 25). Ist demnach der halbe Parameter $= \frac{1}{2}p$,

so wird $PN = \frac{\frac{1}{2}ap}{a^2}\,.\,x$

oder $PN = \frac{\frac{1}{2}px}{a} = \frac{px}{2a}$

Will man die kleine Axe anstatt des Parameters gebrauchen, so sey dieselbe $= 2b$, dann ist $2a, 2b :: 2b, p$, folglich $p = \frac{2b^2}{a}$, $\frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$, folglich

$$PN = \frac{b^2}{a^2}\,x$$

Sollen die Abzissen nicht vom Mittelpunkte, sondern vom Scheitel aus gerechnet werden, so sey $sP = x'$, dann ist $CP = Cs + sP$, oder $x = a + x'$. Setzet man diesen Werth von x in $PN = \frac{\frac{1}{2}px}{a}$ so ist

$$PN = \frac{\frac{1}{2}p\,(a + x')}{a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}px'}{a}$$

$$= \frac{1}{2}p + \frac{px'}{2a}$$

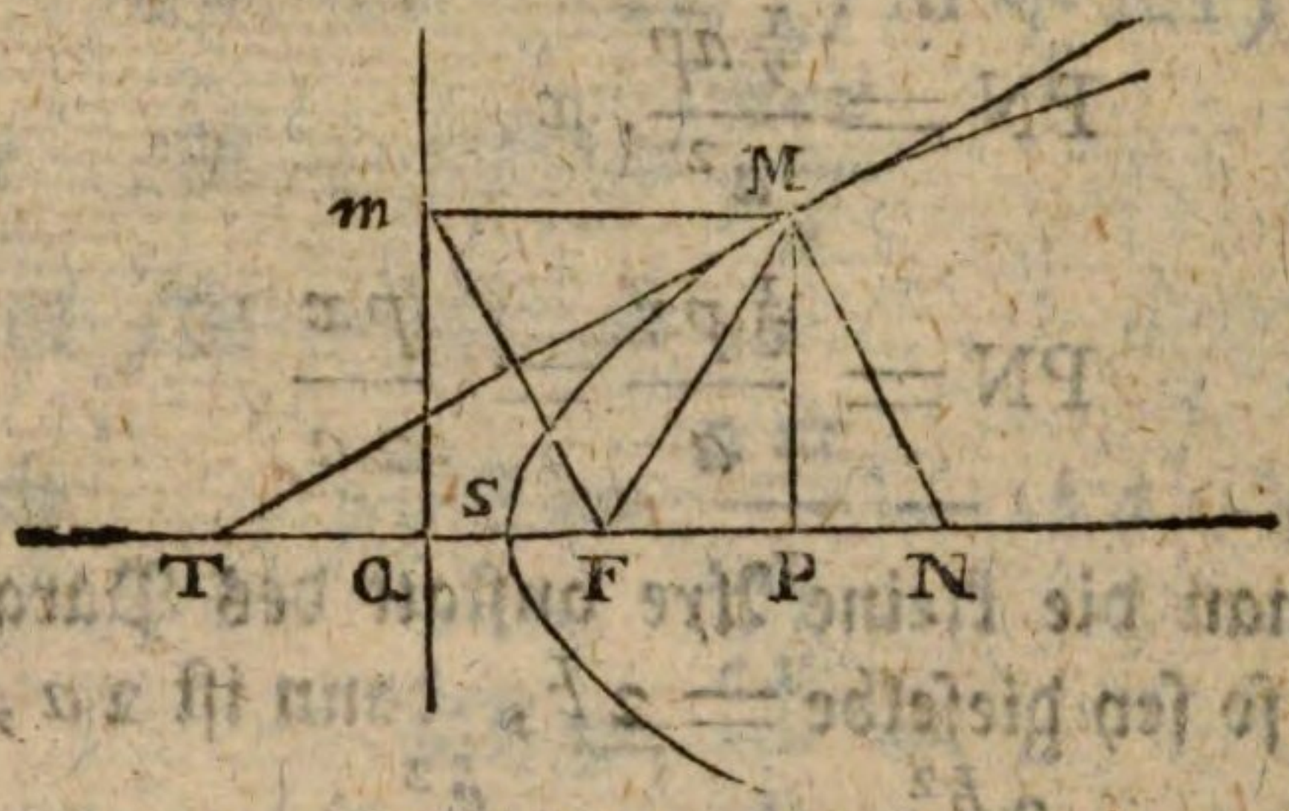
Setzet

Setzet man den nemlichen Werth von x in $PN = \frac{b^2}{a^2} x$

so kömmt $PN = \frac{b^2}{a^2} (a + x')$

oder $PN = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a^2} x'$

Für die Parabel.



Es werde Mm mit der Axe parallel gezogen und der MF gleich gemacht, und der Winkel mMF durch MT halbiret, so ist MT die Tangente. Ziehet man mQ auf der Axe senkrecht, so ist mQ die Direktrisse, und es ist QS = SF, und QF machet die Hälfte des Parameters aus.

Nun ist MN mit mF parallel, weil beide auf der Tangente senkrecht stehen. Folglich ist MmFN ein Parallelogramm.

Also ist $FN = Mm$

Nun ist ferner $Mm = QP$, also

$FN = QP$

Nimm beiderseits den gemeinschaftlichen Theil FP ab, so bleibet $PN = QF$

Es sey der Parameter $= p$, so ist $QF = \frac{1}{2} p$, also

$PN = \frac{1}{2} p$

Für

Für alle drei Kegelschnitte.

Wenn man die gefundenen Werthe der Subnormal-Linie in der Ellipse und in der Hyperbel zusammen fasset, so ist

$$\text{Subnormale} = \tfrac{1}{2}p \mp \frac{px'}{2a}$$

wo a die halbe Haupt-Axe, p den Parameter und x' die Abzisse vom Scheitel an gerechnet, ausdrücket. Das Zeichen — ist für die Ellipse und + für die Hyperbel. Je grösser die Axe $2a$ wird, desto kleiner wird der Bruch $\frac{px'}{2a}$ In der Parabel wird $2a$ unendlich, also wird $\frac{px'}{2a}$ zu nichts, und es bleibet blos $\frac{1}{2}p$ zur Subnormale.

§. 4.

Aufgabe.

Die Subtangente für jeden Punkt eines Regelschnittes finden.

Auflösung. In den drei vorher gehenden Figuren, so wie überhaupt bei jeder krummen Linie, wo die Koordinaten rechtwinklich sind, machen die Tangente MT, die Normale MN, und das Stück TN der verlängerten Axe ein rechtwinkliches Dreieck, und da MP auf die Hypotenuse senkrecht fällt, so ist

PN, PM :: PM, PT

das heißt, die Subnormale verhält sich zur Applikate, wie diese zur Subtangente.

Nun ist in der Ellipse und Hyperbel

$$\text{PN} = \tfrac{1}{2}p \mp \frac{\frac{1}{2}px}{a}$$

wo p den Parameter und a die halbe Hauptaxe ausdrücket, die Abzissen aber vom Scheitel an gerechnet sind. Soll

die

die ganze Axe a genannt werden, so muß man anstatt a schreiben $\frac{1}{2}a$, und dann ist

$$PN = \frac{1}{2}p \mp \frac{\frac{1}{2}px}{\frac{1}{2}a}$$

oder $$PN = \frac{1}{2}p \mp \frac{px}{a}$$

Ferner ist PM oder $y = \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)}$

Also ist

$$\left(\frac{1}{2}p \mp \frac{px}{a}\right), \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)} :: \sqrt{\left(\frac{apx \mp px^2}{a}\right)}, PT$$

daher $$\frac{apx \mp px^2}{a} = \left(\frac{1}{2}p \mp \frac{px}{a}\right) . PT$$

$$apx \mp px^2 = \left(\frac{1}{2}ap \mp px\right) . PT$$

$$ax \mp x^2 = \left(\frac{1}{2}a \mp x\right) . PT$$

$$(a \mp x)x = \left(\frac{1}{2}a \mp x\right) . PT$$

$$PT = \frac{(a \mp x)x}{\frac{1}{2}a \mp x}$$

oder $$\left(\frac{1}{2}a \mp x\right), (a \mp x) :: x, PT$$

das heißt, in der Ellipse und in der Hyperbel verhält sich die Differenz oder Summe der halben Hauptaxe und der Abzisse, zur Differenz oder Summe der ganzen Hauptaxe und der Abzisse, wie die Abzisse zur Subtangente.

In der Parabel ist $PN = \frac{1}{2}p$, und $PM = \sqrt{px}$, daher

$\frac{1}{2}p$,

$\frac{1}{2}p$; $\sqrt{px}$ :: $\sqrt{px}$, PT

$px = \frac{1}{2}p$. PT

$2px = p$. PT

$2x =$ PT

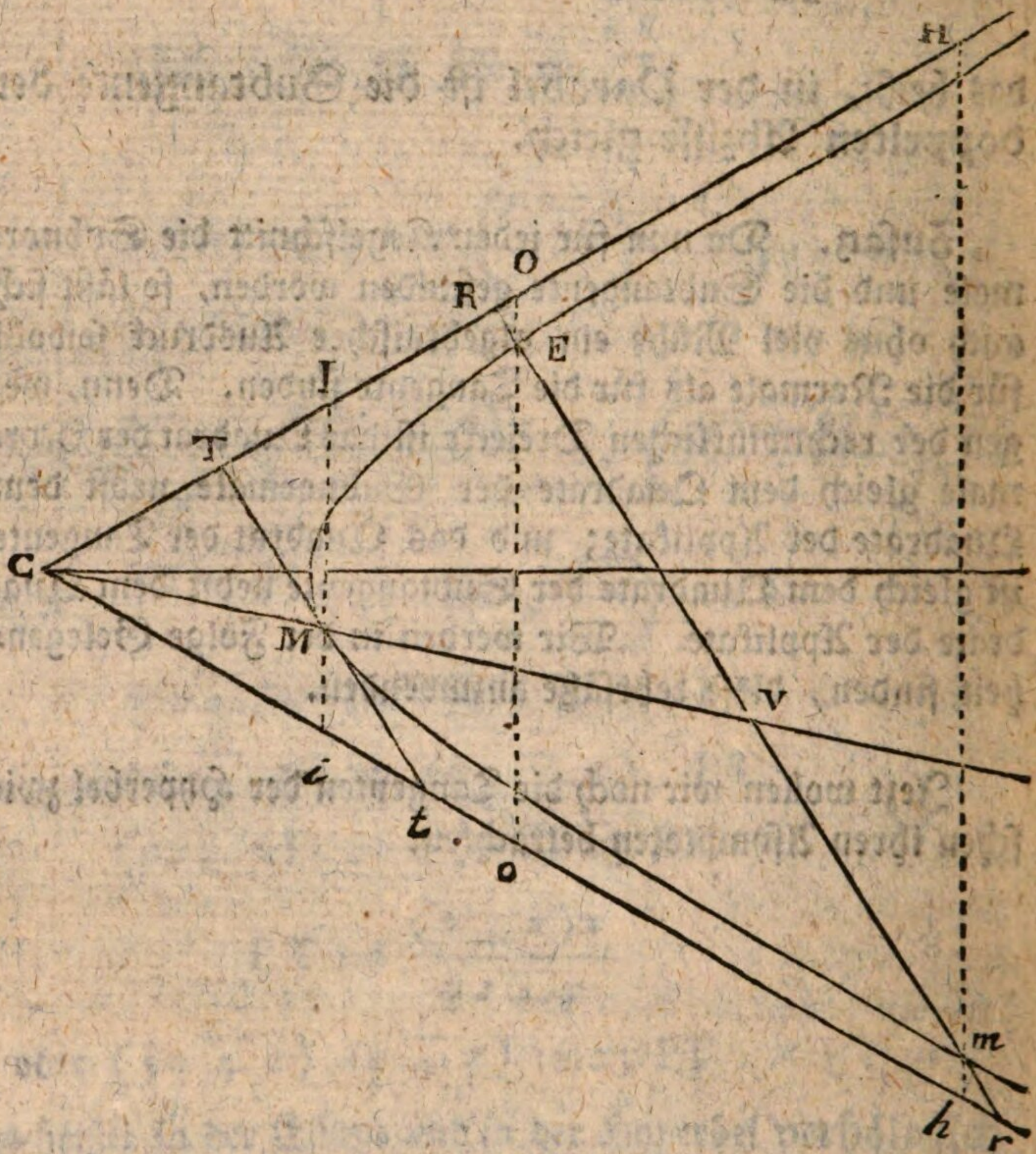
das heißt, in der Parabel ist die Subtangente der doppelten Abzisse gleich.

Zusatz. Da nun für jeden Kegelschnitt die Subnormale und die Subtangente gefunden worden, so läßt sich auch ohne viel Mühe ein algebraischer Ausdruck sowohl für die Normale als für die Tangente finden. Denn, wegen der rechtwinklichen Dreiecke ist das Quadrat der Normale gleich dem Quadrate der Subnormale nebst dem Quadrate der Applikate; und das Quadrat der Tangente ist gleich dem Quadrate der Subtangente nebst dem Quadrate der Applikate. Wir werden in der Folge Gelegenheit finden, diese Lehrsätze anzuwenden.

Jezt wollen wir noch die Tangenten der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten betrachten.

§. 5.

Wenn man zu einem Punkte M der Hyperbel die Tangente ziehet, und dieselbe beiderseits bis an die Asymptote verlängert, so sind die Theile MT, M*t* der Tangente allemal gleich.



Um dieses zu beweisen, ziehe R*r* mit der Tangente T*t* parallel. Durch *m* ziehe *hm*H, und durch E ziehe OE*o*, beide auf der Haupt-Axe senkrecht. Die ähnlichen Dreiecke REO, R*m*H geben

RE, R*m* :: OE, H*m*

Die ähnlichen Dreiecke *rhm*, *ro*E geben

E*r*, *mr* :: E*o*, *mh*

Mul-

Multipliziret man beide Proporzionen Satz für Satz, so ist $(RE \times Er), (Rm \times mr) :: (EO \times Eo), (Hm \times mh)$

Nun sind die Rektangel oder Produkte $EO \times Eo$ und $Hm \times mh$ einander gleich, weil sie jeder einer beständigen Größe gleich sind. (I. H. §. 33.).

Also ist auch

$$RE \times Er = Rm \times mr$$

oder $RE \times (Em + mr) = (RE + Em) \times mr$

$(RE \times Em) + (RE \times mr) = (RE + mr) + (Em \times mr)$

$RE \times Em \ldots = \ldots Em \times mr$

$RE \ldots = \ldots mr$

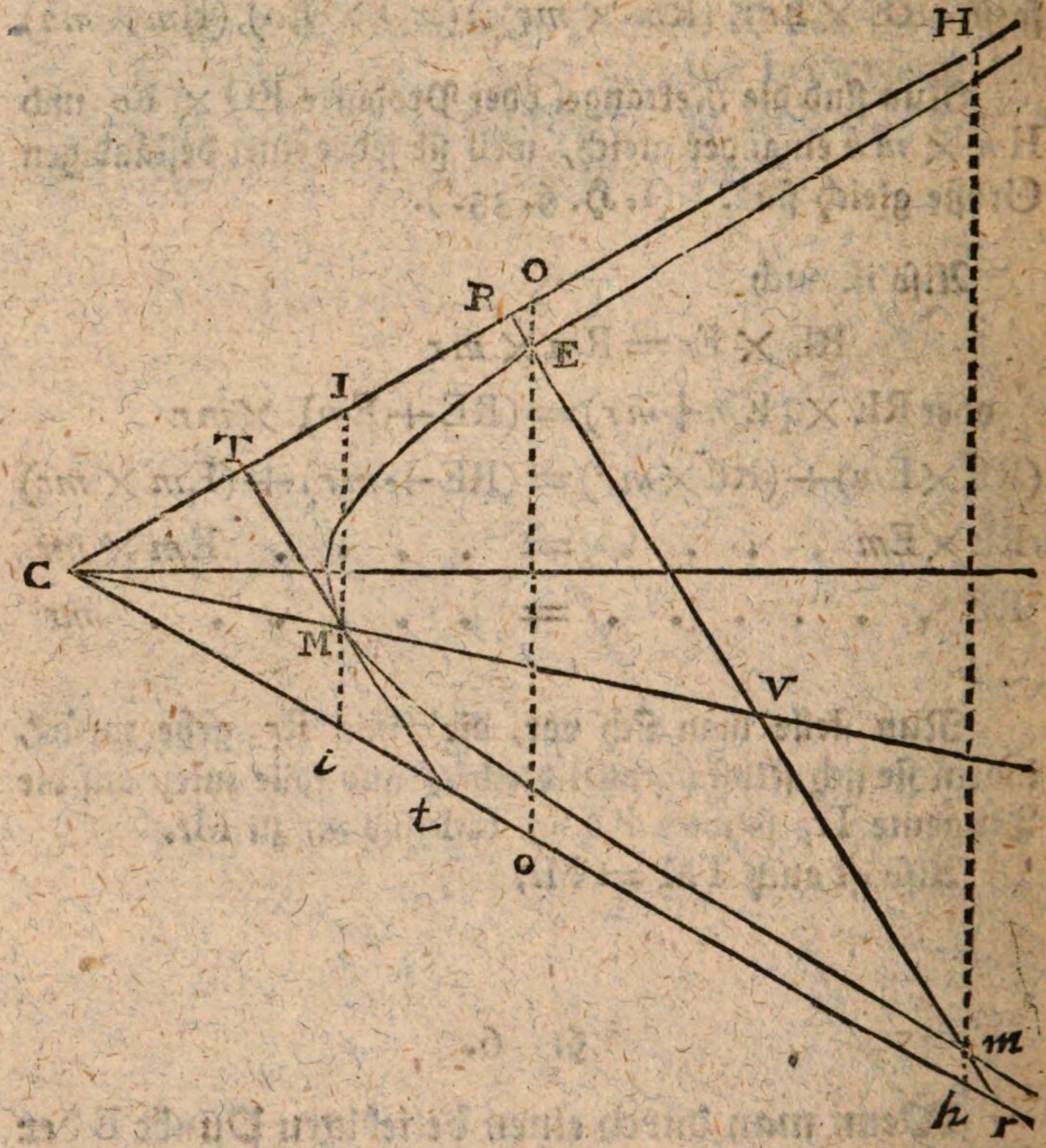
Nun stelle man sich vor, die Linie Rr gehe zurück, indem sie sich selbst parallel bleibet, und falle zulezt auf die Tangente Tt, so wird RE zu TM und mr zu Mt.

Also ist auch $TM = Mt$.

§. 6.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt E der Hyperbel eine gerade Linie Rr mit einer Tangente $M\Gamma$ parallel ziehet, so ist das Rektangel aus ER und Er gleich dem Quadrate der TM.

(Siehe die folgende Figur.)



Durch den Berührungs-Punkt M ziehe I M auf der Haupt-Axe senkrecht. So geben die ähnlichen Dreiecke TMI, REO

$$TM, MI :: RE, EO$$

und die ähnlichen Dreiecke M*it*, E*or* geben

$$Mt(=TM), Mi :: Er, Eo$$

Multipliziret man beide Proporzionen Satz für Satz, so ist

$$(TM)^2, (MI \times Mi) :: (ER \times Er), (EO \times Eo)$$

Nun

Nun sind die Rektangel MI × M*i* und EO × E*o* einander gleich, weil sie einer beständigen Grösse gleich sind (I. H. §. 33) folglich ist auch

$$(TM)^2 = ER \times Er$$

§. 7.

Jede Linie CV die durch den Mittelpunkt der Hyperbel gehet, und die Hyperbel in M schneidet, halbiret die Linie R*r*, und auch die Linie E*m*, die mit der Tangente parallel ist, welche durch den Punkt M gehet.

Denn, wegen der ähnlichen Dreiecke, ist

RV, TM :: VC, MC
V*r*, M*t* :: VC, MC
daher RV, V*r* :: TM, M*t*

Da nun TM = M*t* (§. 5.), so ist auch RV = V*r*, und da oben (§. 5.) bewiesen worden, daß RE = *rm*, so ist RV — RE = V*r* — *rm* oder VE = V*m*.

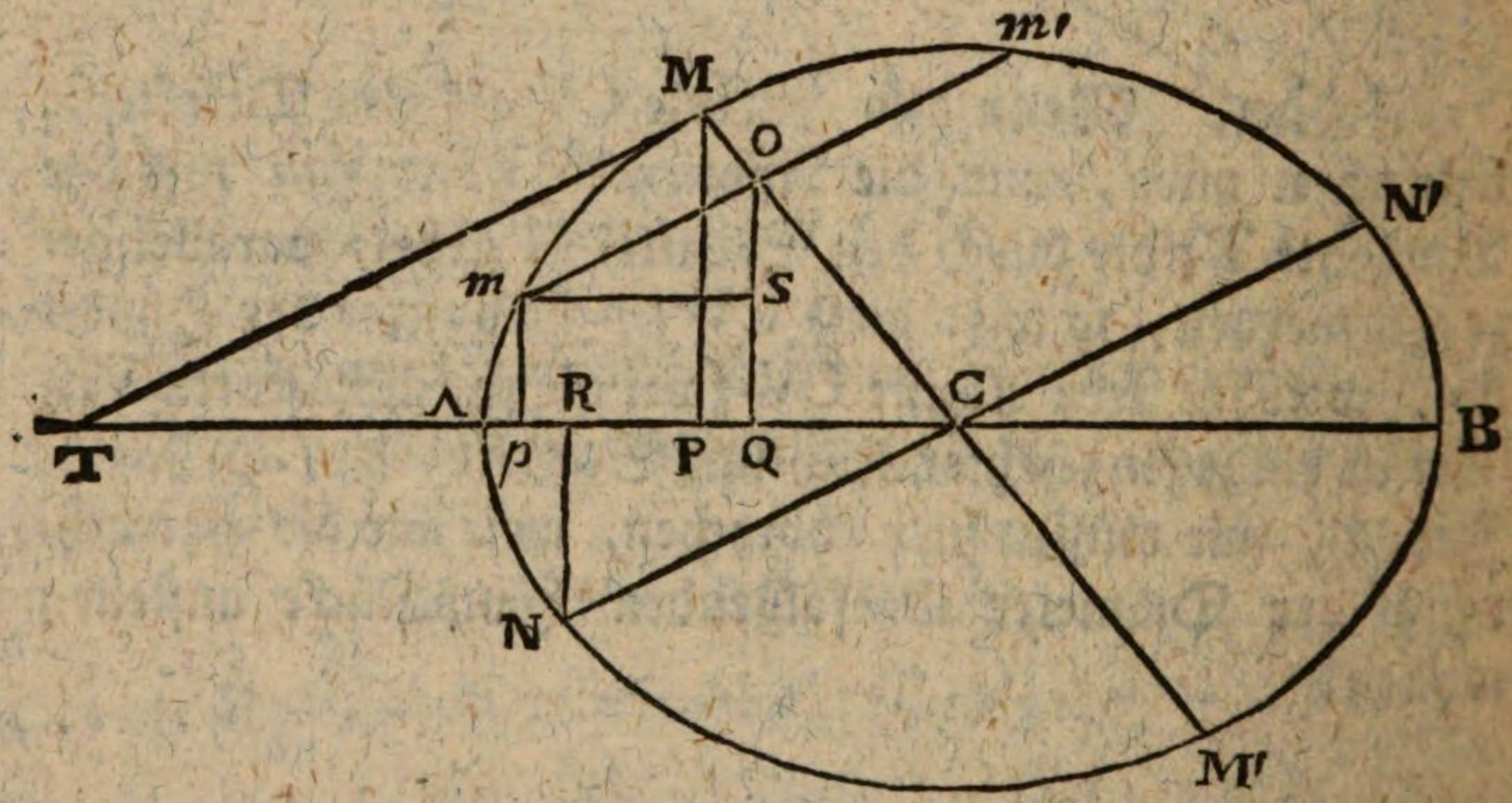
Zusatz. Wenn also die Linie CV als eine Direktrisse betrachtet wird, und die Applikaten VE, V*m* mit der Tangente T*t* die durch den Scheitel M gehet, parallel gezogen werden, so wird diese CV ein Diameter der Hyperbel, weil für jede Abzisse CV zwei gleiche Applikaten VE, V*m* in entgegengesetzter Richtung Statt finden (1. H. §. 5.). Jedoch, wir müsseu hier abbrechen, weil wir die Betrachtung der Diameter im folgenden Hauptstücke anstellen wollen.

Drittes Hauptstück.

Von den Diametern der Kegelschnitte.

§. 1.

Aus einen beliebigen Punkte M der Ellipse, werde durch den Mittelpunkt C die gerade Linie MCM′ gezogen, die sich beiderseits im Umfange der Ellipse endiget, so wird diese Linie MM′ ein Diameter der Ellipse genannt, weil sie, wie bald bewiesen werden soll, als eine Direktrize der Abzissen betrachtet werden kann, worauf zu jeder Abzisse zwei gleiche und entgegengesetzte Applikaten gehören. (I. H. §. 5.)



Durch den Ursprung oder Scheitel M dieses Diameters werde die Tangente MT gezogen. Man ziehe einen andern Diameter NN′ mit MT parallel, so ist dieser Diameter NN′ mit dem ersten MM′ konjugirt oder gepaa-

paaret. Man nehme einen beliebigen Theil CO des Diameters MM', so ist CO eine aus dem Mittelpunkte gerechnete Abzisse des Diameters MM'. Durch das Ende O der Abzisse ziehe O*m* oder O*m'* mit der Tangente MT oder dem konjugirten Diameter NN' parallel, so ist O*m* oder O*m'*, die zur Abzisse MO gehörige Applikate. Suchet man zum Diameter MM' und zum konjugirten Diameter NN' die dritte Proporzionallinie, so wird diese der **Parameter** des ersten Diameters MM' genannt.

§. 2.

Wir wollen jezt beweisen, daß die Koordinaten CO und O*m* oder CO und O*m'* ähnliche Eigenschaften haben, wie die Koordinaten die auf der großen oder kleinen Axe der Ellipse genommen werden.

Zu diesem Ende fällen wir MP, *mp* und OQ senkrecht auf die Axe AB, und ziehen *m*S mit derselben Axe parallel. Es sey

$$\begin{aligned} AB &= a \\ PM &= y \\ CP &= \zeta \\ Qp &= g \\ CQ &= k \end{aligned}$$

so ist
$$\begin{aligned} AP &= \tfrac{1}{2}a - \zeta \\ PB &= \tfrac{1}{2}a + \zeta \\ Ap &= CA - Cp = AC - CQ - Qp \\ &= \tfrac{1}{2}a - k - g \\ pB &= CB + Cp = \tfrac{1}{2}a + k + g \end{aligned}$$

Die Dreiecke TPM, *m* SO sind ähnlich, weil ihre Seiten parallel sind, folglich ist

TP, PM:: *m*S, SO
oder TP, PM:: *p*Q, SO

Nun ist $TP = \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z}$, Denn es ist (II. H. §. 4.)

$$(AC - AP);\ (AB - AP) :: AP,\ TP,$$

oder $$PC,\ PB :: AP,\ TP$$

$$z,\ (\tfrac{1}{2}a + z) :: (\tfrac{1}{2}a - z),\ TP \left(= \frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z} \right)$$

Setzet man demnach die Werthe der Linien TP, PM, pO in die Proporzion

$$TP,\ PM :: pQ,\ SO$$

so kömmt $\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z}, y :: g,\ SO$

$$\text{daher } SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$$

Ferner geben die ähnlichen Dreicke CMP, COQ folgende Proporzion:

$$CP,\ PM :: CQ,\ QO$$

oder $$z,\ y :: k,\ QO$$

$$\text{daher } QO = \frac{ky}{z}$$

Nun ist

$$pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$$

Es ist ferner in der Ellipse (I. H. §. 21.)

$$(pm)^2,\ (PM)^2 :: (Ap \times pB),\ (AP \times PB)$$

Hier ist, wie eben gefunden worden,

$$pm = y\left(\frac{k}{z} - \frac{gz}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}\right)$$

folg-

folglich $(pm)^2 = y^2\left(\frac{k}{\zeta} - \frac{g\zeta}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}\right)^2$

$PM = y$ und $(PM)^2 = y^2$

$$Ap \times pB = [\tfrac{1}{2}a - (k+g)] \times [\tfrac{1}{2}a + (k+g)]$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2$$
$$AP \times PB = (\tfrac{1}{2}a - \zeta)(\tfrac{1}{2}a + \zeta)$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2$$

Setzet man diese Werthe in die Proporzion, so kömmt

$$y^2\left(\frac{k}{\zeta} - \frac{g\zeta}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}\right)^2, y^2 :: [\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2], (\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)$$

$$\left(\frac{k}{\zeta} - \frac{g\zeta}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}\right)^2, 1 :: [\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2], (\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)$$

$$\left(\frac{k(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2) - g\zeta^2}{\zeta(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)}\right)^2, 1 :: [\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2], (\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)$$

$$\frac{[k(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2) - g\zeta^2]^2}{\zeta^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2}, 1 :: [\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2], (\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)$$

Man multiplizire die äußersten und mittleren Sätze in einander, so kömmt

$$\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2 = \frac{[k(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2) - g\zeta^2]^2}{\zeta^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}a^2 - (k+g)^2 = \frac{k^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2 - 2gk\zeta^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2) + g^2\zeta^4}{\zeta^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}a^2 - k^2 - 2gk - g^2 = \frac{k^2(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2)}{\zeta^2} - 2gk + \frac{g^2\zeta^2}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}$$

oder

$$\tfrac{1}{4}a^2 - k^2 - 2gk - g^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2k^2}{\zeta^2} - k^2 - 2gk + \frac{g^2\zeta^2}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}$$

oder

$$\frac{1}{4}a^2 - g^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2 k^2}{\zeta^2} + \frac{g^2 \zeta^2}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}$$

Diese Gleichunng wird uns bald gute Dienste leisten. Unterdessen wollen wir eine Folgerung daraus ziehen, welche uns ebenfalls nützlich seyn wird.

§. 3.

Weil CO so groß oder so klein angenommen werden kann, als man will, so laßt uns setzen es werde $CO = o$, dann wird $mO = NC$. $CQ\ (= k) = o$ und $Qp\ (= g) = CR$. In der gefundenen Gleichung setze man es werde $k = o$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 - g^2 = \frac{g^2 \zeta^2}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}$$

$$\frac{1}{4}a^2 \left(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right) - g^2 \left(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right) = g^2 \zeta^2$$

$$\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2 \zeta^2 - \frac{1}{4}a^2 g^2 + g^2 \zeta^2 = g^2 \zeta^2$$

$$\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^2 \zeta^2 - \frac{1}{4}a^2 g^2 \quad \ldots = o$$

$$\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{4}\zeta^2 - \frac{1}{4}g^2 = o$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2 - g^2 = o$$

$$\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2 \quad \ldots = g^2$$

$$\left(\frac{1}{2}a - \zeta\right)\left(\frac{1}{2}a + \zeta\right) = g^2$$

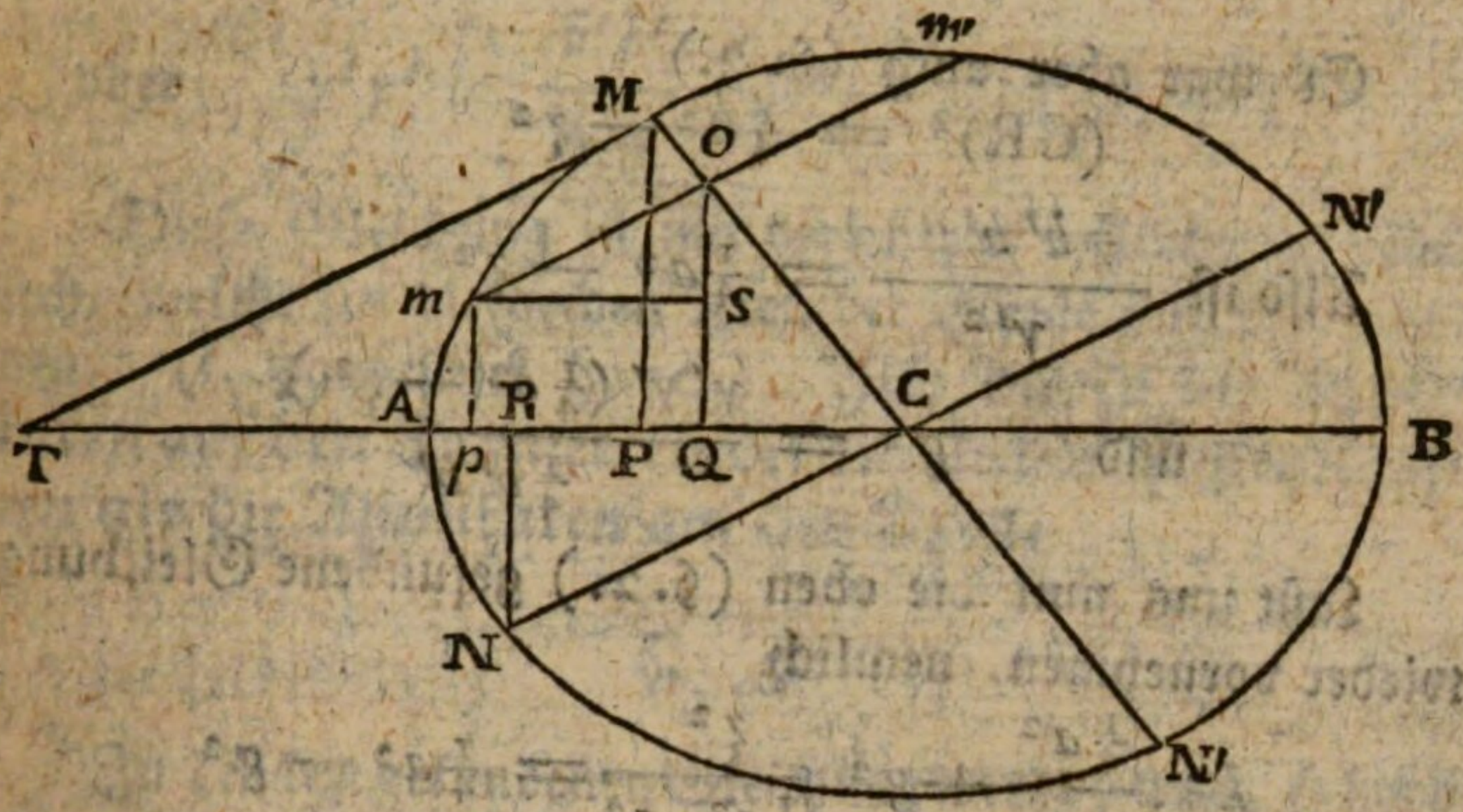
$$AP \times PB = (CR)^2$$

Das heißt, wenn man von beiden Enden M und N der konjugirten Diameter senkrechte Linien MP und NR auf die Haupt-Axe fället, so ist das Quadrat der CR gleich den Rektangel aus AP und PB.

§. 4.

Laßt uns nun zu unserem Zwecke näher kommen.

Es



Es sey $CM = \frac{1}{2}a'$

$CN = \frac{1}{2}b'$

$mO = y'$

$CO = \zeta'$

Die ähnlichen Dreiecke CPM, CQO geben

$CM, CO :: CP, CQ$

$\frac{1}{2}a', \zeta' :: \zeta, k$

daher ist $k = \frac{\zeta'\zeta}{\frac{1}{2}a'}$

$$k^2 = \frac{\zeta\zeta \cdot \zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}$$

Die Dreiecke CNR, mSO sind ähnlich, weil sie parallele Seiten haben. Folglich ist

$mO, mS :: CN, CR$

oder $y', g :: \frac{1}{2}b', CR$

daher $CR = \frac{\frac{1}{2}b'g}{y'}$

$$(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}b'b'g^2}{y'y'}$$

Es war aber auch (§. 3.)

$$(CR)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - z^2$$

Also ist $\dfrac{\frac{1}{4}b'b'g^2}{y'^2} = \tfrac{1}{4}a^2 - z^2$

und $g^2 = \dfrac{y'y'(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}{\frac{1}{4}b'b'}$

Laßt uns nun die oben (§. 2.) gefundene Gleichung wieder vornehmen, nemlich

$$k^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}a^2}{z^2} + g^2 \cdot \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2} = \tfrac{1}{4}a^2 - g^2$$

und laßt uns anstatt k^2 und g^2 die gefundenen Werthe setzen, so kömmt

$$\frac{z^2 z'z' \frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a'a' z^2} + \frac{y'y'(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}{\frac{1}{4}b'b'} \cdot \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2} = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{y'y'(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}{\frac{1}{4}b'b'}$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} + \frac{z^2 y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{\frac{1}{4}a^2 y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{z^2 y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{\frac{1}{4}a^2 y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$$

Dividire alles durch $\frac{1}{4}a^2$

$$\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} = 1 - \frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'}$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} = \frac{\frac{1}{4}a'a' - z'z'}{\frac{1}{4}a'a'}$$

$$y'y' = \frac{\frac{1}{4}b'b'}{\frac{1}{4}a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z')$$

$$y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z')$$

oder

oder $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{2}a' - z')(\frac{1}{2}a' + z')$

Diese Gleichung ist mit derjenigen vollkommen ähnlich, welche für die beiden Axen der Ellipse gefunden worden. (I. Hauptstück §. 20.) Also haben die Applikaten auf den Diametern die nemlichen Eigenschaften als die Applikaten auf den Axen.

§. 5.

In der lezt gefundenen Gleichung werde $y = o$, so wird

$$\frac{b'b'}{a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z') = o$$

$$\tfrac{1}{4}a'a' - z'z' = o$$

$$z'z' = \tfrac{1}{4}a'a'$$

$$z' = \pm\tfrac{1}{2}a'$$

folglich begegnet die krumme Linie der Direktrize M M' an zwei Orten, nemlich wann $z' = +\frac{1}{2}a'$ und wann $z' = -\frac{1}{2}a$. Diese beiden Punkte M und M' sind demnach gleich weit vom Mittelpunkte C entfernet. Folglich halbiren alle Diameter der Ellipse einander im Mittelpunkte.

§. 6.

Vermöge der gefundenen Gleichung ist

$$y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z')$$

daher $y' = \pm\frac{b'}{a'}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a'a' - z'z')}$

Woher man siehet, daß zu jeder Abzisse CO zwei gleiche Applikaten gehören, nemlich eine positive

tive mO und eine negative Om', welche die Verlängerung der positiven ist. Folglich halbiret ein Diameter jede gerade Linie die mit der Tangente parallel gezogen wird, die durch den Ursprung des Diameters gehet. Und daher entstehet eben der Name Diameter, die wir schon im allgemeinen (§ 1.) erkläret haben.

Daher läßt sich schließen, daß, da MM′ vom Diameter NN′ halbiret wird, der Diameter MM′ parallel seyn müsse mit der Tangente die durch den Ursprung N des Diameters NN′ gehet.

§. 7.

Weil $y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - \zeta'\zeta')}$, so siehet man

hieraus, daß die Applikaten mO auf einen Diameter MM′ erhalten werden, wenn man die Applikaten eines Zirkels nimmt, welcher MM′ zum Durchmesser hat, wenn man dieselben nach dem Verhältnisse wie a' zu b' verkleinert oder vergrössert, und dieselben in einer schiefen Lage aufstellet, welche durch den Winkel bestimmet wird, den beide konjugirten Diameter bilden.

Ist $a' = b'$ das heißt, sind beide konjugirten Diameter gleich, so sind die Applikaten völlig den Applikaten des besagten Zirkels gleich.

§. 8.

Will man wissen, an welcher Stelle der Ellipse die konjugirten Diameter gleich seyn können, so braucht man nur den Fall zu suchen, wo CP = CR, oder $(CP)^2 = (CR)^2$. Wir haben aber oben angenommen $CP = \zeta$ folglich $(CP)^2 = \zeta^2$, und gefunden $CR^2 = \frac{1}{4}a^2 - \zeta^2$. Man setze demnach

$$\zeta^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2$$

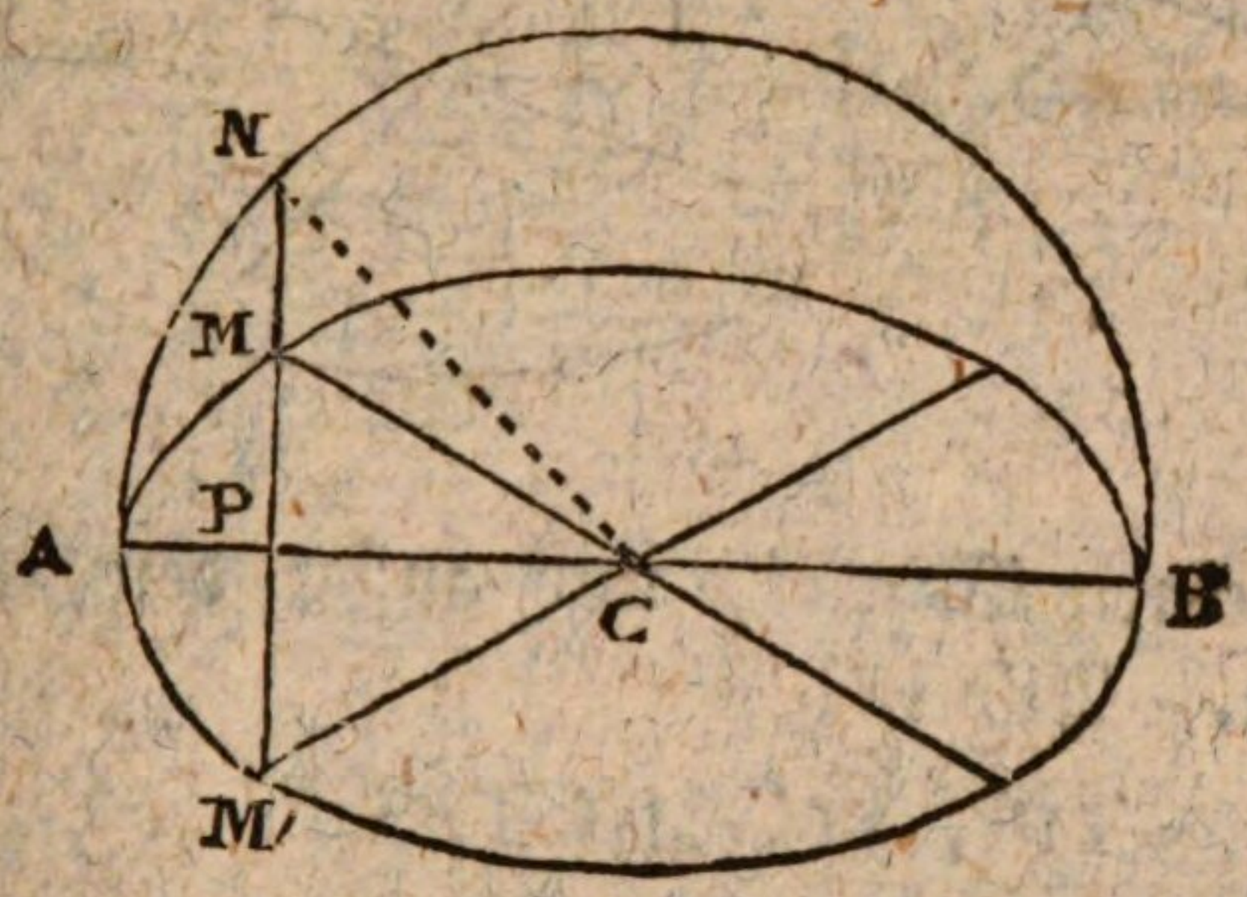
so

so ist $2z^2 = \frac{1}{4}a^2$

$z^2 = \frac{1}{8}a^2$

$z^2 = \sqrt{\frac{1}{8}a^2}$

Dieser Werth von z kann folgenderweise konstruiret werden.



Ueber der großen Axe AB beschreibe den halben Zirkel ANB. Nimm $AN = 45^g$. Aus N fälle NP senkrecht auf AB, so wird NP die Ellipse in zwei Punkten M und M' schneiden, und CM, CM' werden die beiden gleichen konjugirten Diameter seyn.

Denn es sey $CP = z$. Das Dreieck CPN ist rechtwinklich und gleichschenklich, weil $\angle NCA = 45^g$. Folglich ist

$$CP^2 + PN^2 = CN^2$$

$$2\,CP^2 = CA^2$$

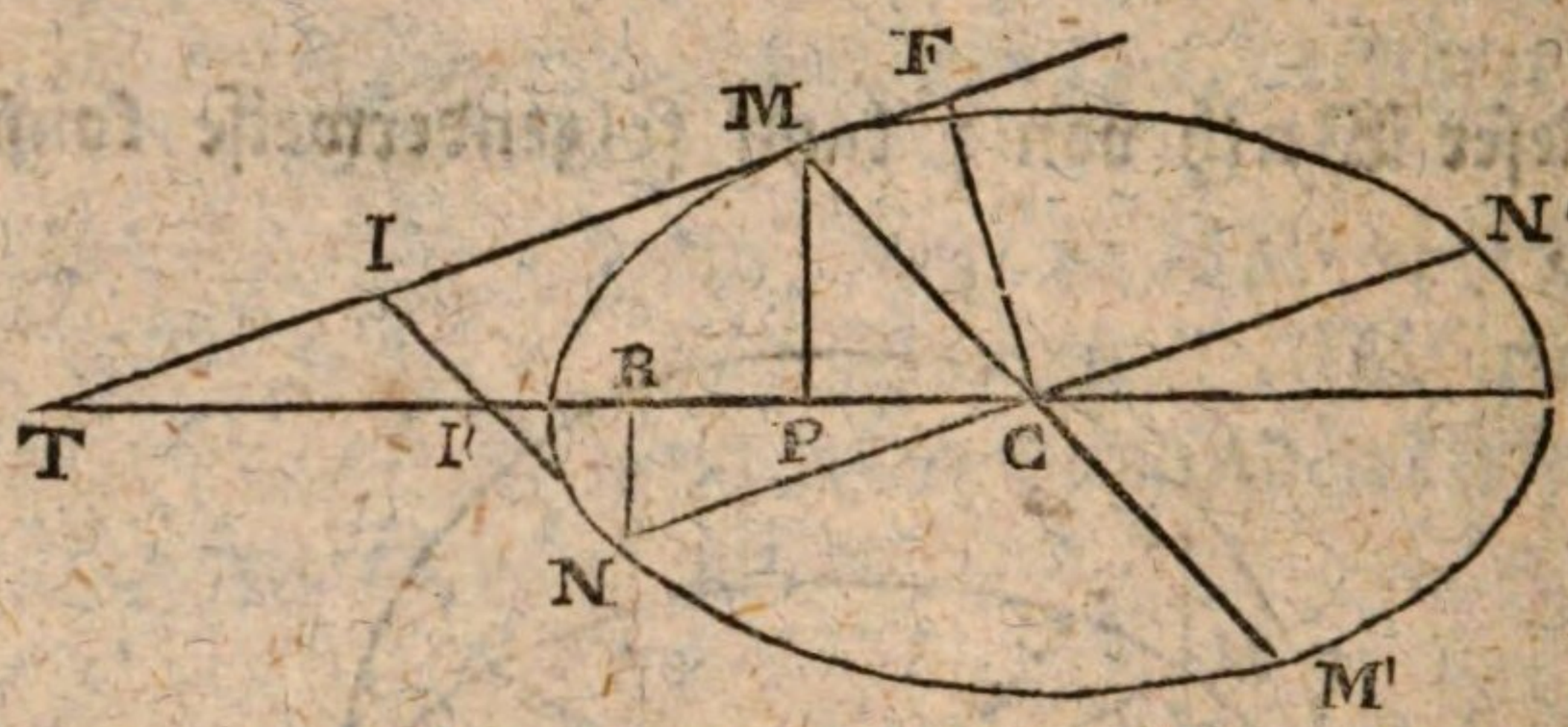
$$2z^2 = (\tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$z^2 = \tfrac{1}{8}a^2$$

$$z = \sqrt{\tfrac{1}{8}a^2}$$

§. 9.

Aus dem Mittelpunkte C fälle man die senkrechte CF auf die Tangente TM, so ist △TPM ∽ △TFC, weil sie in



T einen gemeinen Winkel, und außer dem, jeder einen rechten haben. Also ist

$$TM, PM :: CT, CF$$

$$\text{daher} \quad CF = \frac{PM \times CT}{TM}$$

Ebenfalls sind die Dreiecke TPM, CRN ähnlich, weil ihre Seiten parallel sind. Also ist

$$PT, TM :: CR, CN$$

$$\text{daher} \quad CN = \frac{TM \times CR}{PT}$$

$$\text{folglich ist} \quad CN \times CF = \frac{TM \times CR}{PT} \times \frac{PM \times CT}{TM}$$

$$\text{oder} \quad CN \times CF = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$$

$$\text{und} \quad (CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 . (CT)^2 . (CR)^2}{(PT)^2}$$

Es ist aber

$$(PM)^2 \text{ oder } y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)$$

$$(PT)^2 = \frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2}{z^2} \quad (\S.\ 2.)$$

$$CT = PT + PC = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - z^2}{z} + z = \frac{\tfrac{1}{4}a^2}{z}$$

$$\text{also } (CT)^2 = \frac{\tfrac{1}{16}a^4}{z^2}$$

$$(CR)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - z^2 \quad (\S.\ 3.)$$

Also wird

$$(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right) \cdot \frac{\tfrac{1}{16}a^4}{z^2} \cdot \left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)}{\left(\frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2}{z^2}\right)}$$

$$(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2 \cdot \frac{\tfrac{1}{16}a^4}{z^2} \times \frac{z^2}{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2\right)^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \tfrac{1}{16}a^4$$

$$= \tfrac{1}{16}a^2 b^2$$

$$\text{also } CN \times CF = \tfrac{1}{4}ab$$

Nun ziehe man die Tangente NI', welche der TM in I begegnet, so entstehet aus beiden Tangenten und beiden Diametern das Parallelagramm CNIM, dessen Basis CN und dessen Höhe CF ist. Also ist der Flächen Inhalt $CN \times CF$, Folglich ist Parallelogramm

$$CNIM = \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{2}a \times \tfrac{1}{2}b$$

Es ist aber $\frac{1}{2}a$ die halbe große Axe und $\frac{1}{2}b$ die halbe kleine Axe.

Also

Also sind die Paralellogramme, welche von den Tangenten an den Enden der konjugirten Diameter gebildet werden, dem Rektangel aus beiden halben Axen gleich. Folglich sind solche Paralellogramme in der nemlichen Ellipse alle einander gleich.

§. 10.

Die ähnlichen Dreiecke TPM, CRN geben diese Proporzion:

$$PT, PM :: CR, RN$$

$$\text{daher } RN = \frac{CR \times PM}{PT}$$

$$(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2}$$

Da nun gefunden worden

$$(CR)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2$$

$$(PM)^2 = \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)$$

$$(PT)^2 = \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2}{\zeta^2}$$

so ist

$$(RN)^2 = \frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)}{\left(\frac{(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2}{\zeta^2}\right)}$$

$$(RN)^2 = \frac{\frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2 \cdot \zeta^2}{(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2)^2}$$

$$(RN)^2 = \frac{b^2}{a^2}\zeta^2$$

Nun

Nun geben die rechtwinklichen Dreiecke CRN, CPM

$$(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$$

$$(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$$

$$(CR)^2+(RN)^2+(CP)^2+(PM)^2=(CN)^2+(CM)^2$$

Substituiret man im ersten Gliede der Gleichung die algebraischen Werthe der Linien, so ist

$$\tfrac{1}{4}a^2 - z + \frac{b^2 z^2}{a^2} + z^2 + \frac{b^2}{a^2}(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2) = (CN)^2 + (CM)^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{b^2 z^2}{a^2} + \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{b^2 z^2}{a^2} = (CN)^2 + (CM)^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 = (CN)^2 + (CM)^2$$

$$(\tfrac{1}{4}a)^2 + (\tfrac{1}{2}b)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$$

folglich ist die Summe der Quadrate zweier konjugirten halben Diameter in der Ellipse, gleich der Summe der Quadrate beider halben Axen, oder die Summe der Quadrate der ganzen Diameter ist gleich der Summe der Quadrate der ganzen Axen. Also ist die Summe solcher Quadrate allemal einerlei, oder sie ist eine beständige Grösse in einer und derselben Ellipse.

§. 11.

In die Gleichung

$$(CN)^2 = (RN)^2 + (CR)^2$$

setze man die algebraischen Werthe der Linien CR und RN, so kömmt

$$(CN)^2 = \frac{b^2 z^2}{a^2} + \tfrac{1}{4}a^2 - z^2$$

Nun ist

$$(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right) + \frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)^2}{\zeta^2}$$

$$(TM)^2 = \frac{(b^2 : a^2)\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)\zeta^2 + \left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)^2}{\zeta^2}$$

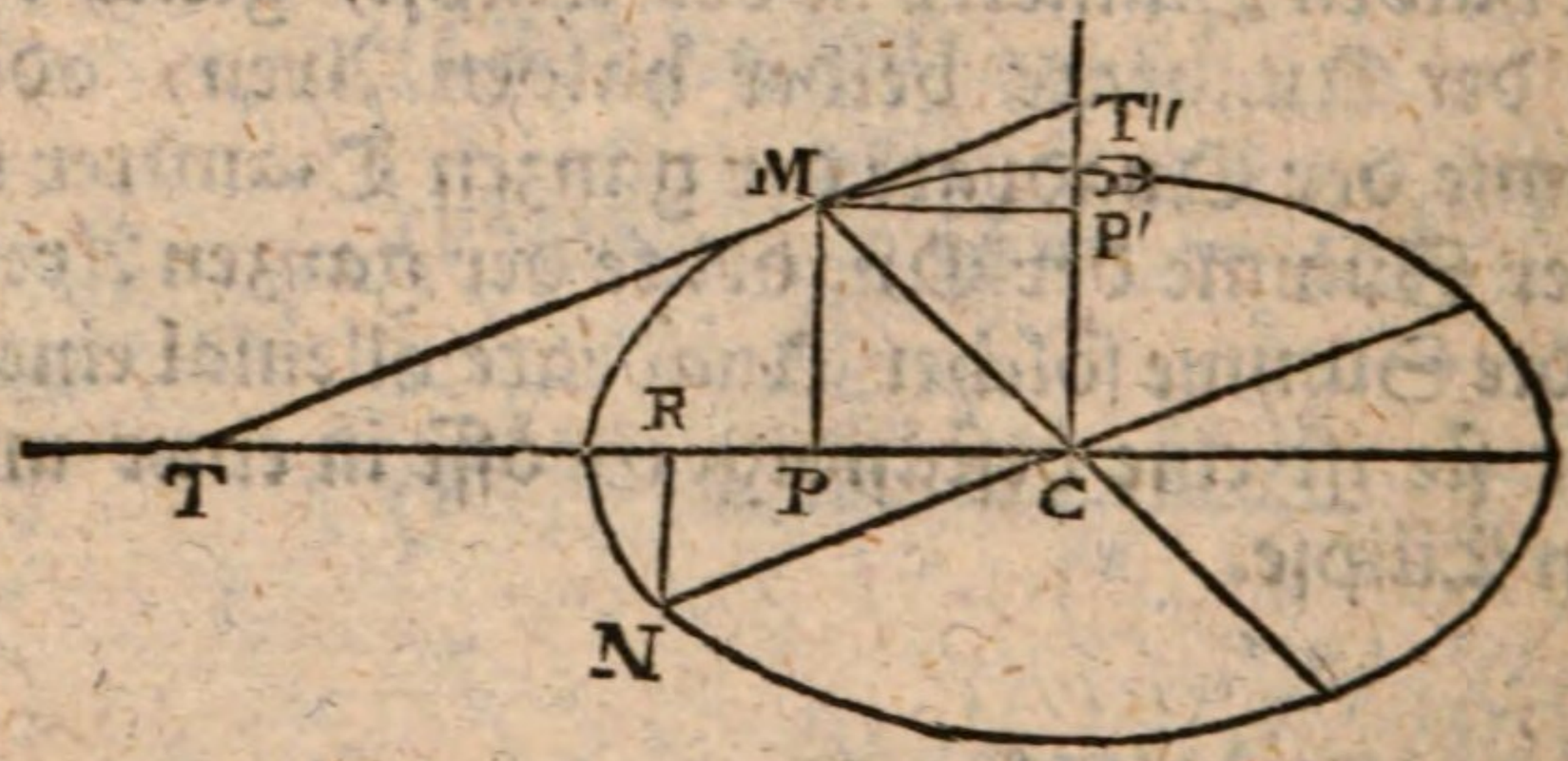
$$(TM)^2 = \left[\frac{b^2}{a^2}\zeta^2 + \left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)\right] \times \frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)}{\zeta^2}$$

$$(TM)^2 = \left(\frac{b^2\zeta^2}{a^2} + \tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right) \times \frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)}{\zeta^2}$$

Folglich ist

$$(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2}{\zeta^2}$$

Man verlängere nun die Tangente bis sie die kleine Axe CD im T″ schneide, und ziehe noch MP′ mit der großen Axe parallel.



so geben die ähnlichen Dreiecke TPM, MP′T″

PT, TM :: P′M, MT″

$(PT)^2, (TM)^2 :: (P'M)^2, (MT'')^2$

$$\frac{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)^2}{\zeta^2}, \left(CN^2 \times \frac{\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2}{\zeta^2}\right) :: \zeta^2, (MT'')^2$$

$$\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)^2, (CN)^2 \times \left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right) :: \zeta^2, (MT'')^2$$

$$\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right), (CN)^2 :: \zeta^2, (MT'')^2$$

Daher

Daher ist $(MT'')^2 = \frac{(CN)^2 \cdot \zeta^2}{\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2}$

Da nun $(TM)^2 = \frac{(CN)^2 \left(\frac{1}{4}a^2 - \zeta^2\right)}{\zeta^2}$

so wird $(TM)^2 \times (MT'')^2 = (CN)^4$

Also $TM \times MT'' = (CN)^2$

Es werde nun der Parameter des Diameters CM mit p' bezeichnet, so ist, vermöge der Difinition dieses Parameters, (§. 1)

$$2CM, 2CN :: 2CN, p'$$

folglich $2CM \times p' = 4(CN)^2$

$$CM \times p' = 2(CN)^2$$

$$\frac{1}{2}p' \times CM = (CN)^2$$

Es war aber auch $(CN)^2 = TM \times MT''$

folglich ist $TM \times MT'' = \frac{1}{2}p' \times CM$

oder $CM, TM :: MT'', \frac{1}{2}p'$

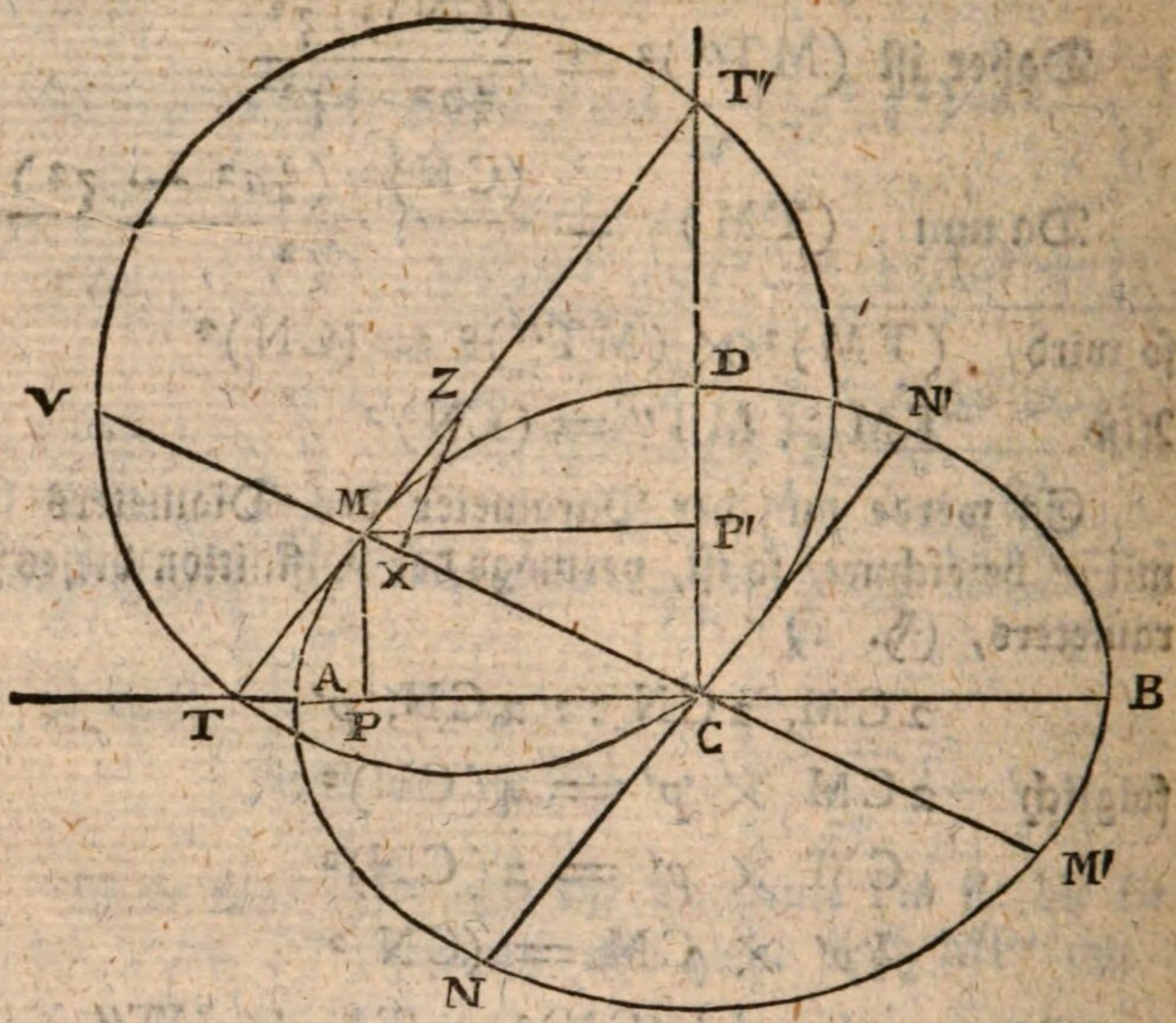
§. 12.

Aufgabe.

Den Parameter eines Diameters der Ellipse finden.

Auflösung. Man nehme TT'' zum Halbmesser, beschreibe darüber einen Zirkel, so wird dieser durch den

(Siehe die folgende Figur.)



Punkt C gehen, weil TCT'' ein rechter Winkel ist. Man verlängere CM, bis zur Peripherie in V, so schneiden die Sehnen TT'', CV einander in umgekehrtem Verhältnisse. Folglich ist CM, TM :: MT'', MV

Es war aber CM. TM :: MT'', $\frac{1}{2}p'$

also ist $MV = \frac{1}{2}p'$

das heißt, es ist MV gleich dem halben Parameter des Diameters MM'

§. 13.

Aufgabe.

Die Axen einer Ellipse finden, um die Ellipse beschreiben zu können, wenn zwei konjugirte Diameter MM' und NN' nebst dem Winkel, den sie bilden, gegeben sind.

Auflösung. Ziehe beide gegebene Diameter kreuzweise, so daß sie den gegebenen Winkel machen. Verlängere

längere CM, bis daß MV dem halben Parameter des Diameters MM′ gleich sey. Durch M ziehe eine unbestimmte Linie TT″, mit NN′ parallel.

So weiß man, daß diese TT″ oder ein Theil derselben durch den Mittelpunkt des Zirkels TVT″ gehet. Man weiß auch, daß CV eine Sehne dieses Zirkels sey. Halbiret man CV in X, und errichtet XZ senkrecht über der Sehne CV, so muß auch XZ durch den Mittelpunkt gehen. Folglich ist Z der Mittelpunkt.

Aus Z durch C beschreibe einen Zirkel, so wird er die TT″ in zwei Punkten T und T″ schneiden.

Ziehe TC und T″C, so hast du die Lage beider Axen, und es muß nur noch die Größe derselben bestimmet werden.

Fälle MP, MP′ senkrecht auf beide Axen. Mache CA gleich der mittleren Proporzional-Linie zwischen CT und CP, desgleichen CD gleich der mittleren Proporzional-Linie zwischen CT″ und CP′. Denn wir haben oben (§. 9)

gefunden $CT = \frac{\frac{1}{4}a^2}{z}$

und da $CP = z$,

so ist $CT \times CP = \frac{\frac{1}{4}a^2}{z} \times z = \frac{1}{4}a^2 = (\frac{1}{2}a)^2$

folglich ist $CT, \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a, CP$

Es ist ferner TP, PM :: TC, CT″

$$\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z}, \frac{b}{a}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)} :: \frac{\frac{1}{4}a^2}{z}, CT''$$

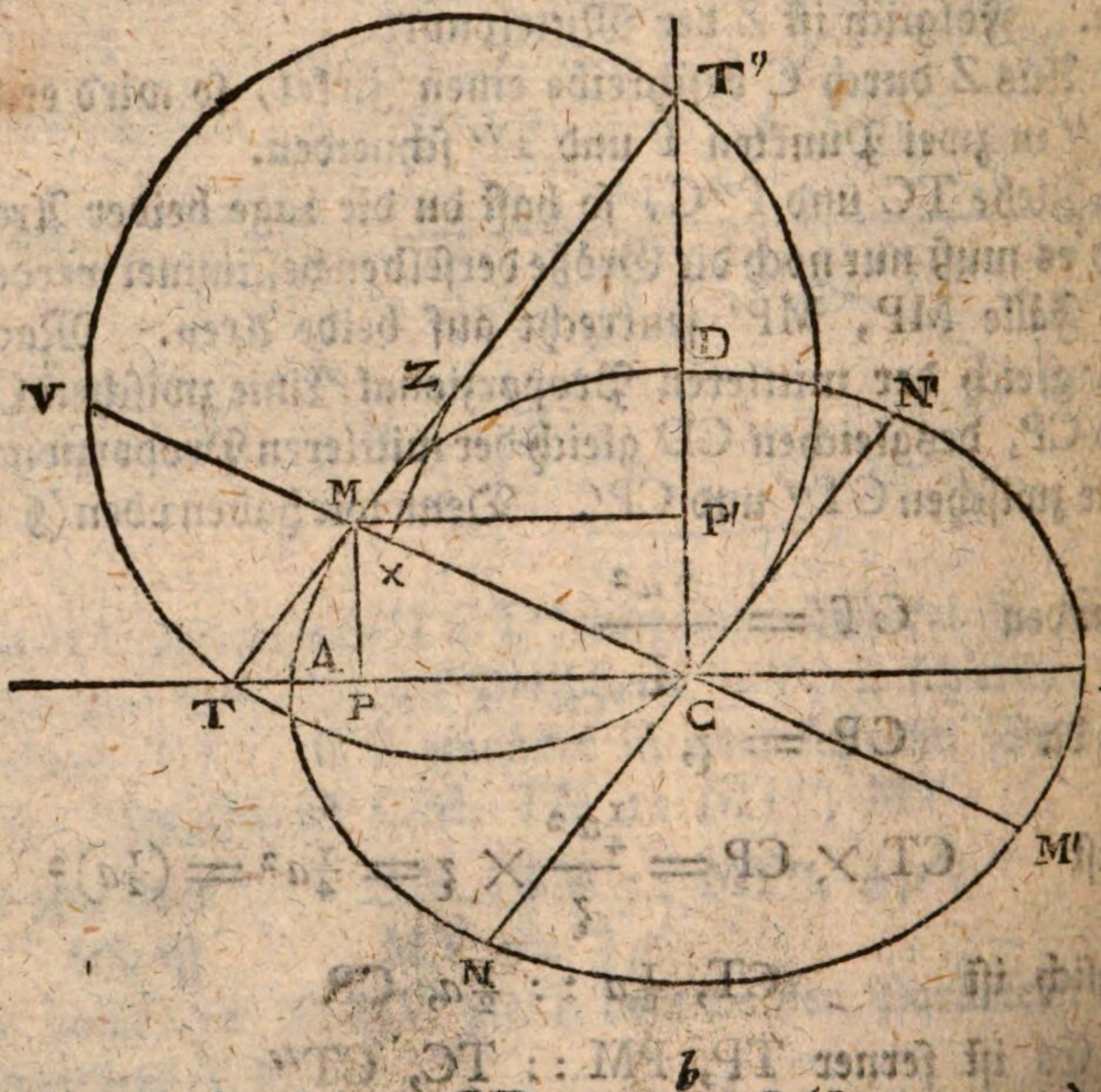
$$(\tfrac{1}{3}a^2 - z^2), \frac{b}{a}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)} :: \tfrac{1}{4}a^2, CT''$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)}, \frac{b}{a} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad :: \tfrac{1}{4}a^2, CT''$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - z^2)}, \frac{b^2}{a^2} \quad :: \tfrac{1}{4}a^2, CT''$$

daher $CT'' = \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2}}$

oder $CT'' = \frac{(\frac{1}{2}b)^2}{\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)}}$



Es ist aber $\frac{1}{2}b = CD$, und $\frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - z^2)} =$ PM $=$ CP', also ist

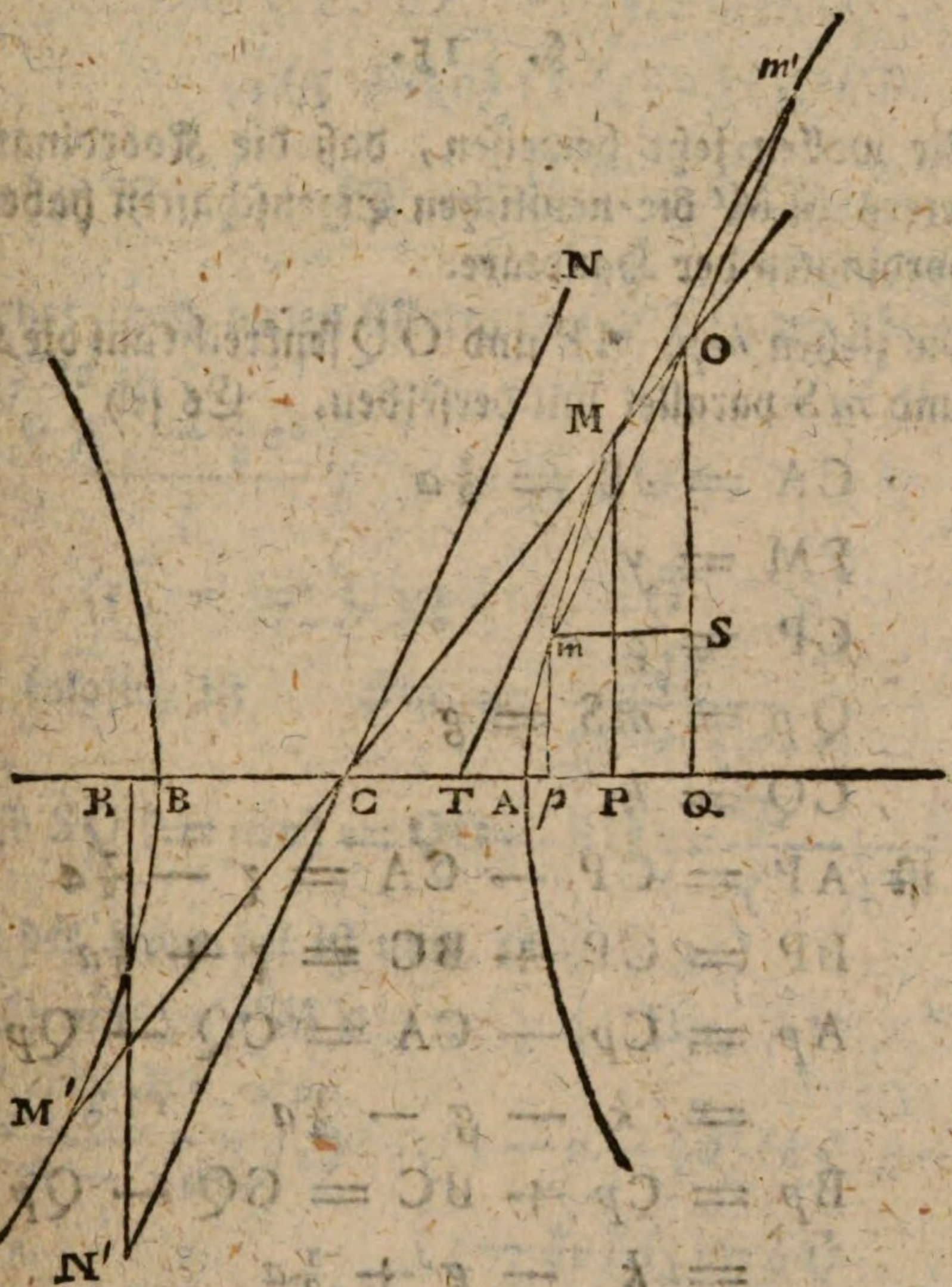
$$CT'' = \frac{(CD)^2}{CP'}$$

oder $CT'', CD :: CD, CP'$

Folglich hat die vorgeschriebene Konstruktion Richtigkeit.

§. 14.

Nachdem wir die Ellipse in Betrachtung ihrer Diameter untersuchet haben, so wollen wir die Hyperbel vornehmen.



Durch den Mittelpunkt C der Hyperbel werde eine gerade Linie MCM' gezogen, welche sich beiderseits in dem Umfange der Hyperbel endiget, so wird diese MM' ein Diameter der Hyperbel genannt, weil sie wirklich die Eigenschaft eines Diameters hat (1. H. §. 5) wie wir

bald sehen werden. Man ziehe mO oder m'O mit der Tangente MT parallel, so daß mO oder m'O sich in der Hyperbel endige, und den verlängerten Diameter M'M schneide, so ist mO oder m'O eine Applikate dieses Diameters, hingegen ist CO die Abzisse, deren Ursprung in C ist.

§. 15.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die Koordinaten des Diameters MM' die nemlichen Eigenschaften haben, als die Koordinaten der Hauptaxe.

Wir ziehen mp, MP und OQ senkrecht auf die Haupt-Axe, und mS parallel mit derselben. Es sey

$$CA = cB = \tfrac{1}{2}a$$
$$PM = y$$
$$CP = z$$
$$Qp = mS = g$$
$$CQ = k$$

so ist $AP = CP - CA = z - \tfrac{1}{2}a$

$$BP = CP + BC = z + \tfrac{1}{2}a$$
$$Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA$$
$$= k - g - \tfrac{1}{2}a$$
$$Bp = Cp + BC = CQ - Qp + BC$$
$$= k - g + \tfrac{1}{2}a$$

Die ähnlichen Dreiecke CPM, CQO geben

$$CP, PM :: CQ, QO$$
$$z, y :: k, QO$$

daher $$QO = \frac{ky}{z}$$

Die

Die Dreiecke TPM, mSO sind ähnlich, weil ihre Seiten parallel sind. Also ist

$$PT, PM :: mS, SO$$

Nun ist in der Hyperbel (II H. §. 4.)

$$(CA + AP), (AB + AP) :: AP, PT$$

$$CP, BP :: (CP - AC), PT$$

$$\zeta, (\zeta + \tfrac{1}{2}a) :: (\zeta - \tfrac{1}{2}a), PT$$

Daher ist $$PT = \frac{\zeta^2 - \frac{1}{2}a^2}{\zeta}$$

Setzet man diesen Werth von PT in die obige Proporzion, so ist

$$\frac{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}{\zeta}, y :: g, SO$$

$$(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2), y\zeta :: g, SO$$

folglich ist $$SO = \frac{g\zeta y}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

Also $SQ (= pm) = QO - SO = \frac{ky}{\zeta} - \frac{g\zeta y}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}$

In der Hyperbel ist nun, (I H. §. 31)

$$(pm)^2, (PM)^2 :: Ap \times Bp, AP \times BP$$

$$\left(\frac{ky}{\zeta} - \frac{g\zeta y}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2, y^2 :: (k - g - \tfrac{1}{2}a)(k - g + \tfrac{1}{2}a),$$

$$(\zeta - \tfrac{1}{2}a)(\zeta + \tfrac{1}{2}a)$$

$$y^2\left(\frac{k}{\zeta} - \frac{g\zeta}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2, y^2 :: [(k-g)^2 - \tfrac{1}{4}a^2], (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$\left(\frac{k}{\zeta} - \frac{g\zeta}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}\right)^2, 1 :: [(k-g)^2 - \tfrac{1}{4}a^2], (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$\frac{[k(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2) - g\zeta^2]^2}{\zeta^2(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}, 1 :: [(k-g)^2 - \tfrac{1}{4}a^2], (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

Man multiplizire die äußersten und mittleren Sätze, so kömmt

$$(k-g)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{[k(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) - g\zeta^2]^2}{\zeta^2(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

oder

$$(k-g)^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{k^2(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2 - 2gk\zeta^2(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) + g^2\zeta^4}{\zeta^2(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}$$

oder

$$k^2 - 2kg + g^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{k^2(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}{\zeta^2} - 2gk + \frac{g^2\zeta^2}{\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

oder

$$k^2 - 2gk + g^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = k^2 - \frac{\tfrac{1}{4}a^2k^2}{\zeta^2} - 2gk + \frac{g^2\zeta^2}{\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

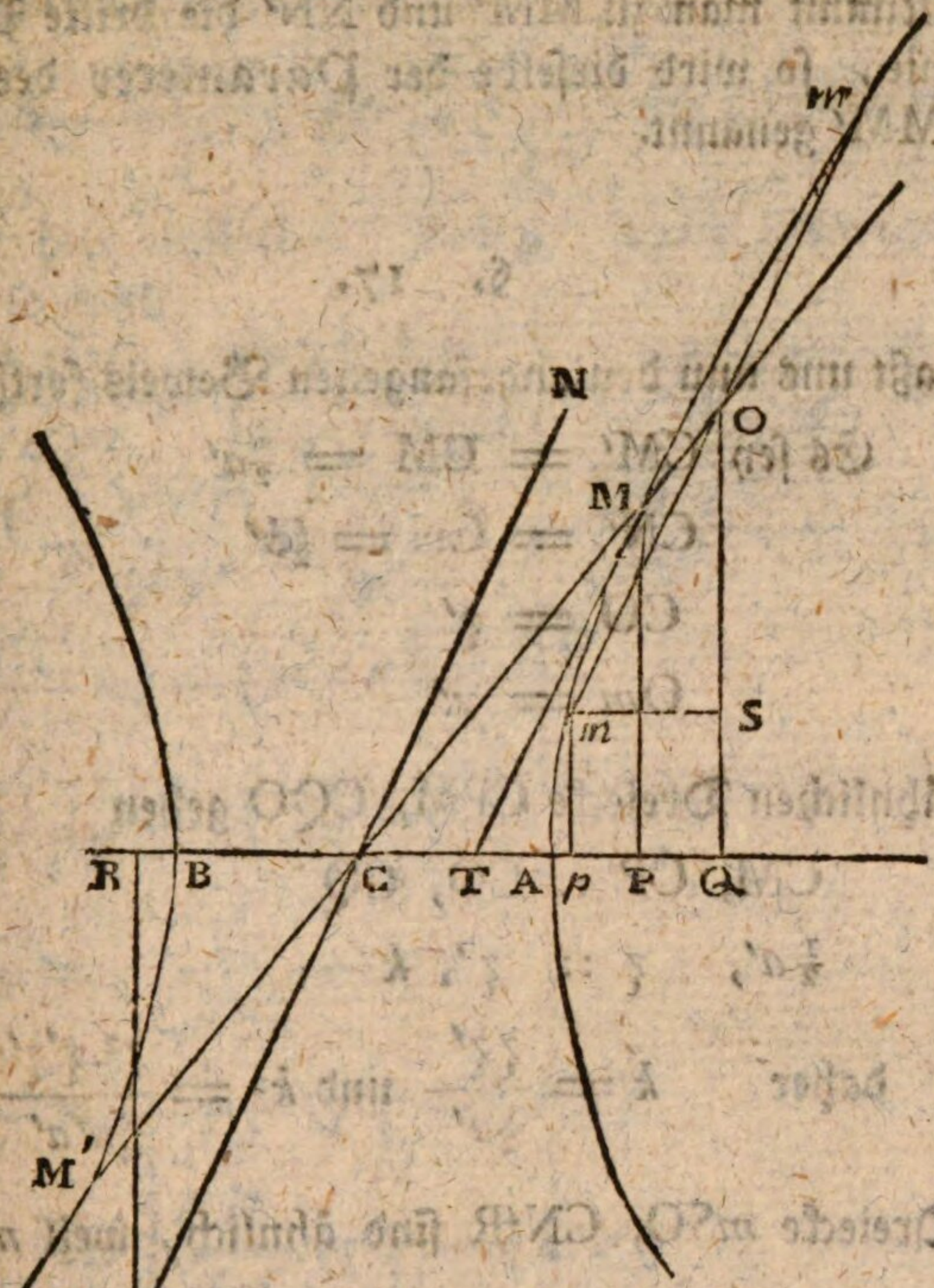
oder

$$g^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = -\frac{\tfrac{1}{4}a^2k^2}{\zeta^2} + \frac{g^2\zeta^2}{\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

§. 16.

Die lezt gefundene Gleichung soll uns zu unserem Zwecke führen. Vorher aber müssen wir noch eine Erklärung geben. Auf der Haupt-Axe, aus dem Punkte

(Siehe die folgende Figur.)



C nehme man den Theil CR, welcher die mittlere Proporzional-Linie sey zwischen BP und AP, so daß $(CR)^2 = AP \times PB = z^2 - \frac{1}{4}a^2$. In R errichte man über der Hauptaxe die senkrechte Linie RN'. Durch den Mittelpunkt C ziehe man NN' mit der Tangente MT parallel, so daß RN und NN' einander in N' schneiden. Mache CN = CN', so ist die Linie NN' der mit MM' konjugirte oder gepaarte Diameter der Hyperbel. Dieser konjugirte Diameter ist bloß in der Absicht eingeführet worden, damit man die Eigenschaften der Ellipse auch in der Hyperbel wieder finden möge.

Nimmt man zu MM′ und NN′ die dritte Proporzionallinie, so wird dieselbe der Parameter des Diameters MM′ genannt.

§. 17.

Laßt uns nun den angefangenen Beweis fortsetzen.

Es sey $CM' = CM = \frac{1}{2}a'$

$CN' = CN = \frac{1}{2}b'$

$CO = \zeta'$

$Om = y'$

Die ähnlichen Dreiecke CPM, CQO geben

$CM, CP :: CO, CQ$

$\frac{1}{2}a', \quad \zeta :: \zeta', k$

daher $k = \frac{\zeta\zeta'}{\frac{1}{2}a'}$ und $k^2 = \frac{\zeta^2\,\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}$

Die Dreiecke mSO, CN′R sind ähnlich, weil mO und CN′ beide mit TM parallel sind. Also ist

$CN', CR :: m\mathrm{O}, m\mathrm{S}$

$\frac{1}{2}b', \; CR :: y', \; g$

daher ist $g = \frac{y' \cdot CR}{\frac{1}{2}b'}$

folglich $g^2 = \frac{y'y' \cdot (CR)^2}{\frac{1}{4}b'b'}$

Nun ist gemacht worden $(CR)^2 = \zeta^2 - \frac{1}{4}a^2$

folglich ist $g^2 = \frac{y'y'(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}b'b'}$

Wir

Wir hatten gefunden (§. 15)

$$-\frac{\frac{1}{4}a^2\,k^2}{\zeta^2}+\frac{g^2\,\zeta^2}{\zeta^2-\frac{1}{4}a^2}=g^2-\frac{1}{4}a^2$$

sezen wir hier anstatt k^2 und g^2 deren leztgefundene Werthe, so wird

$$-\frac{\frac{1}{4}a^2\,\zeta^2\,\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'\zeta^2}+\frac{y'y'\zeta^2(\zeta^2-\frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}b'b'(\zeta^2-\frac{1}{4}a^2)}=\frac{y'y'(\zeta^2-\frac{1}{4}a^2)}{\frac{1}{4}b'b'}-\frac{1}{4}a^2$$

$$-\frac{\frac{1}{4}a^2\,\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}+\frac{y'y'\zeta^2}{\frac{1}{4}b'b'}=\frac{y'y'\zeta^2}{\frac{1}{4}b'b'}-\frac{\frac{1}{4}a^2\,y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}-\frac{1}{4}a^2$$

$$-\frac{\frac{1}{4}a^2\,\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}=-\frac{1}{4}a^2-\frac{\frac{1}{4}a^2\,y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$$

$$-\frac{\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}=-1-\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}=\frac{\zeta'\zeta'}{\frac{1}{4}a'a'}-1$$

$$\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}=\frac{1}{\frac{1}{4}a'a'}(\zeta'\zeta'-\frac{1}{4}a'a')$$

$$y'y'=\frac{\frac{1}{4}b'b'}{\frac{1}{4}a'a'}(\zeta'\zeta'-\frac{1}{4}a'a')$$

$$y'y'=\frac{b'b'}{a'a'}(\zeta'\zeta'-\frac{1}{4}a'a')$$

Diese Gleichung ist mit derjenigen ähnlich, welche für die Haupt-Axe gefunden worden. (I. H. §. 27)

§. 18.

Wird $y'=0$, so ist

$$\frac{b'b'}{a'a'}(\zeta'\zeta'-\frac{1}{4}a'a')=0$$

$$\zeta'\zeta'-\frac{1}{4}a'a'=0$$

$$\zeta'\zeta'\ \ldots\ldots=\frac{1}{4}a'a'$$

$$\zeta'\ \ldots\ldots=\pm\frac{1}{2}a'$$

folg-

folglich begegnet die krumme Linie dem Diameter MM′ in zwei Punkten M und M′, welche beide vom Mittelpunkte C um $\frac{1}{2}a'$ entfernet sind. Folglich halbiret der Mittelpunkt der Hyperbel jeden ihrer Diameter.

§. 19.

Die Gleichung $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$

giebt $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$

folglich gehören zu jeder Abzisse CO zwei gleiche Applikaten mO und m'O. Also halbiret jeder Diameter die geraden Linien, welche mit der Tangente parallel gezogen werden, die durch den Ursprung des Diameters gehet.

§. 20.

Dieselbe Gleichung für die Diameter der Hyperbel giebt auch folgende Proporzion

$$a'a', b'b' :: (z'z' - \tfrac{1}{4}a'a'), y'y'$$

oder $y'y', (z' - \frac{1}{2}a')(z' + \frac{1}{2}a') :: b'b', a'a'$

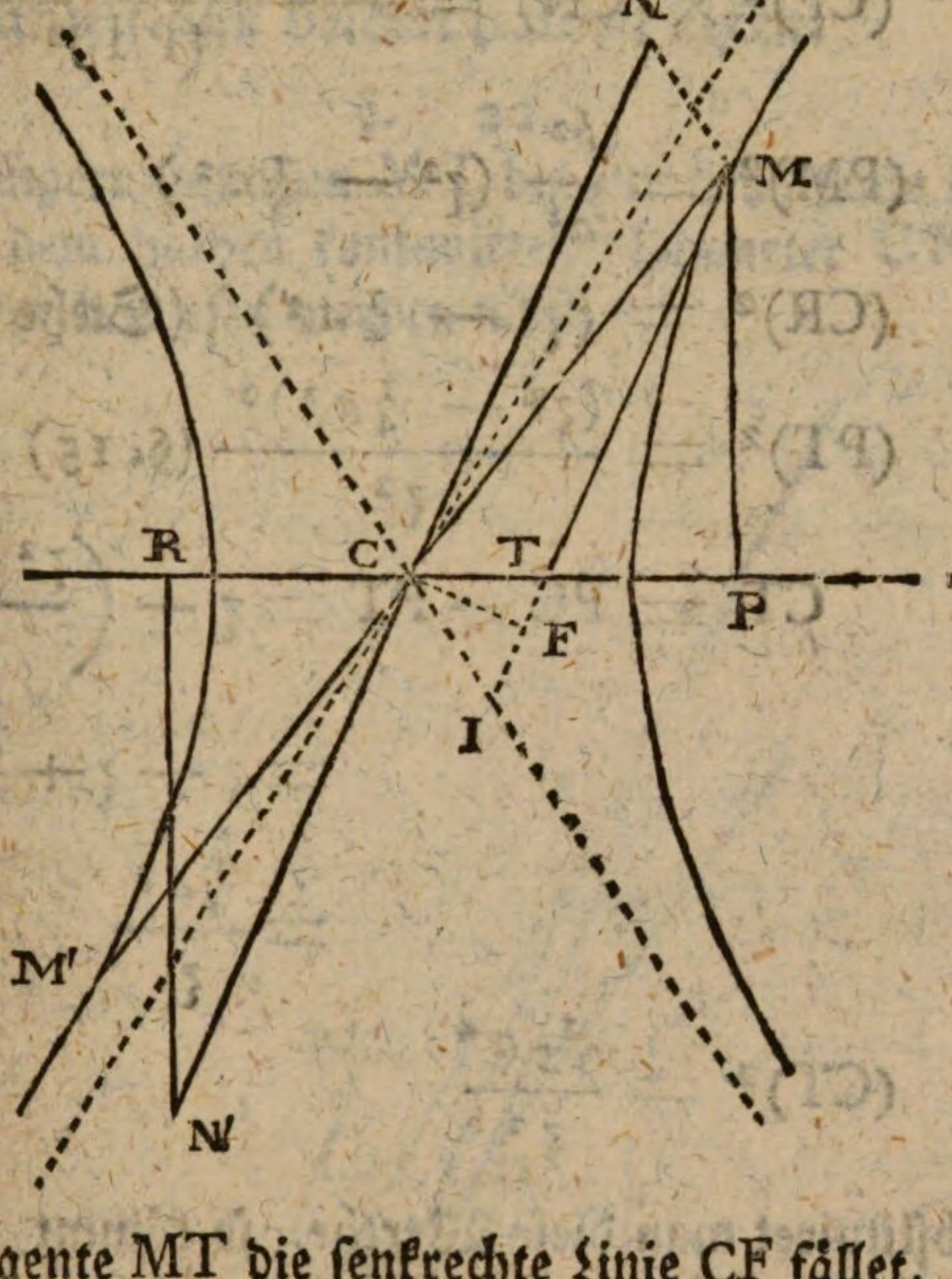
$$(m\mathrm{O})^2, (\mathrm{MO} \times \mathrm{OM}') :: (\mathrm{NN}')^2, (\mathrm{MM}')^2$$

Das heißt, das Quadrat der Applikate verhält sich zum Produkte beider Abzissen (aus den Scheiteln gerechnet), wie sich das Quadrat des konjugirten Diameters verhält zum Quadrate des ersten Diameters, worauf die Abzissen genommen worden.

§. 21.

§. 21.

Wenn man aus dem Mittelpunkte C auf die verlängerte Tangente MT die senkrechte Linie CF fället, so geben die ähnlichen Dreiecke CFT, TPM



$$TM, PM :: CT, CF$$

folglich ist $$CF = \frac{PM \times CT}{TM}$$

Die ähnlichen Dreiecke CRN', TPM geben

$$TP, TM :: CR, CN' \text{ (oder CN)}$$

daher $$CN = \frac{TM \times CR}{PT}$$

folglich ist $$CF \times CN = \frac{PM \times CT}{TM} \times \frac{TM \times CR}{PT}$$

oder

oder $$CF \times CN = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$$

oder $$(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$$

Nun ist $$(PM)^2 = \frac{b^2}{a^2} (\zeta^2 - \tfrac{1}{4} a^2)$$

$$(CR)^2 = (\zeta^2 - \tfrac{1}{4} a^2) \quad \text{(Siehe §. 16)}$$

$$(PT)^2 = \frac{(\zeta^2 - \tfrac{1}{4} a^2)^2}{\zeta^2} \text{ (§. 15)}$$

$$CT = PC - PT = \zeta - \left(\frac{\zeta^2 - \tfrac{1}{4} a^2}{\zeta}\right)$$

$$= \zeta - \zeta + \frac{\tfrac{1}{4} a^2}{\zeta}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4} a^2}{\zeta}$$

also $$(CT)^2 = \frac{\tfrac{1}{16} a^4}{\zeta^2}$$

Substituiret man diese Werthe, so kömmt

$$(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{b^2}{a^2}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \times \frac{\tfrac{1}{16}a^4}{\zeta^2} \times (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) : \frac{(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2}{\zeta^2}$$

$$= \frac{b^2}{a^2}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \times \frac{\tfrac{1}{16}a^4}{\zeta^2} \times (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) \times \frac{\zeta^2}{(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \tfrac{1}{16}a^4 \cdot (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2 \cdot \zeta^2}{a^2 \cdot \zeta^2 \cdot (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2}$$

$$= \frac{b^2 \cdot \tfrac{1}{16}a^4}{a^2}$$

$$= \tfrac{1}{16} a^2 b^2$$

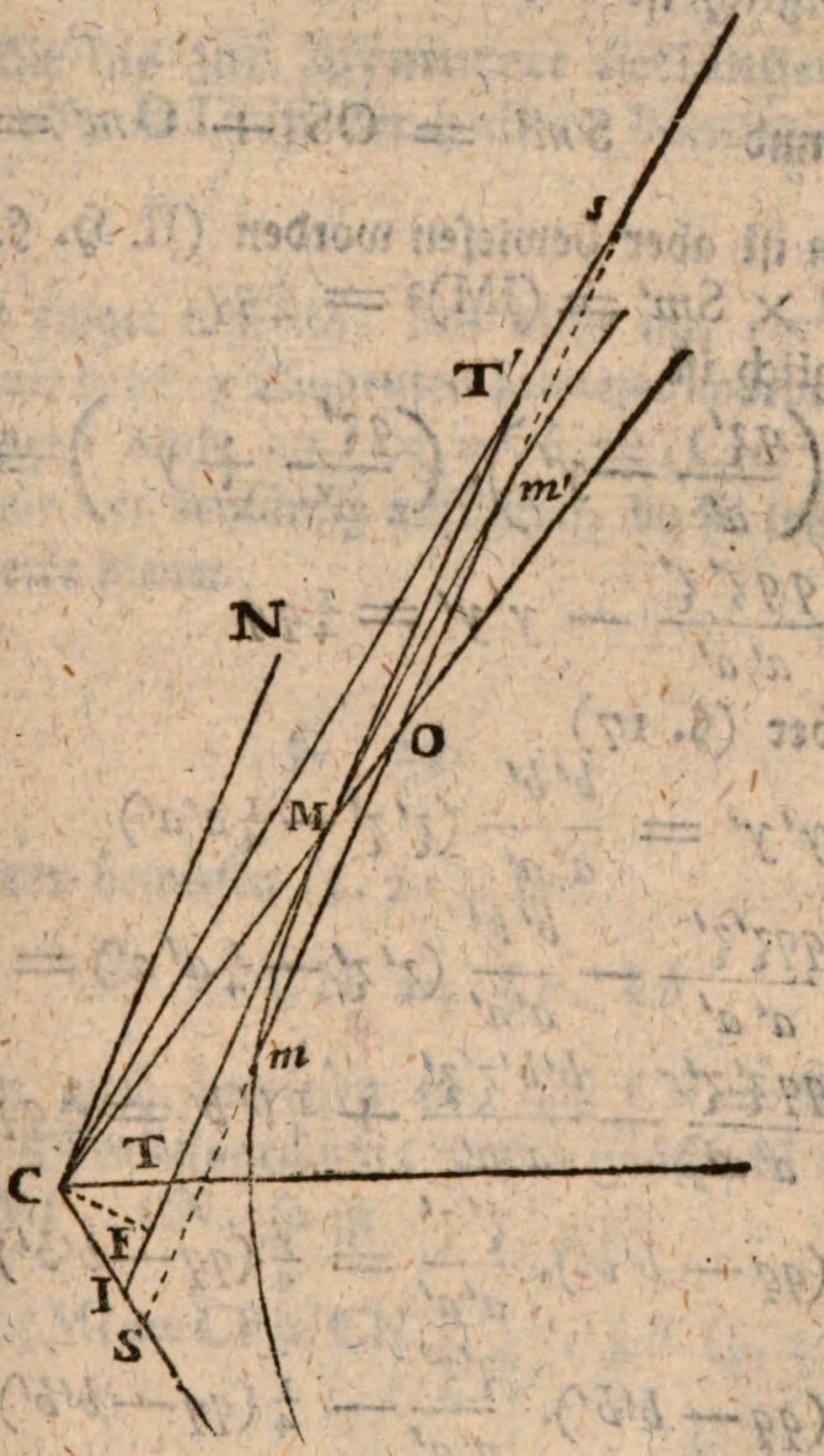
daß. $CF \times CN = \frac{1}{4} b^2 = \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b$

Das

Das heißt, das Parallelogramm aus dem halben konjugirten Diameter CN und der senkrechten CF, die auf die Tangente MT fällt, mit welcher der konjugirte Diameter parallel ist, ist gleich der Rektangel aus beiden halben Axen.

§. 22.

Verlängert man nun MT bis zur Asymptote in I, so wird MI dem halben konjugirten Diameter CN gleich, welches hier bewiesen werden muß.



Es sey, wie vorher (§. 17) $CM = \frac{1}{2}a'$, $CO = z'$, $Om = Om' = y'$, ferner $IM = \frac{1}{2}q$, oder weil bewiesen wor-

den, daß IM = T'M, (II. H. §. 5) so sey auch T'M = $\frac{1}{2}q$. Es werde die Ordinate mm' verlängert in mS und $m's$, so ist ebenfalls (II. H. §. 6) OS = Os

Die ähnlichen Dreiecke CMI, COS geben

CM MI :: CO, OS

$\frac{1}{2}a'$, $\frac{1}{2}q$ :: z', OS oder Os

Folglich ist OS oder Os = $\frac{qz'}{a'}$

Folglich ist sm' = Os − Om' = $\frac{qz'}{a'} - y'$

und Sm' = OS + Om' = $\frac{qz'}{a'} + y'$

Nun ist aber bewiesen worden (II. H. §. 6) daß $sm' \times Sm' = (IM)^2 = \frac{1}{4}qq$

Folglich ist

$$\left(\frac{qz'}{a'} - y'\right) \cdot \left(\frac{qz'}{a'} + y'\right) = \frac{1}{4}qq$$

oder $$\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$$

Es ist aber (§. 17)

$$y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$$

also ist $$\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a') = \frac{1}{4}qq$$

$$\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$$

$$(qq - b'b') \cdot \frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq - b'b')$$

$$(qq - b'b') \cdot \frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = 0$$

$$(qq - b'b') \cdot \left(\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

Divi-

Dividire durch $\frac{\zeta'\zeta'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, so kömmt

$$qq - b'b' = o$$

$$\text{folglich } qq = b'b'$$

$$\text{und } q = b$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{2}b$$

das heißt, die bis zur Asymptote verlängerte Tangente MI oder MT′ ist der halben konjugirten Axe CN gleich.

Hieraus folget zugleich, daß nicht nur $sm' \times m\,S = (IM)^2$, wie bey den Tangenten bewiesen worden (II. H. §. 6), sondern auch $sm' \times m'\,S = (CN)^2$, welche Folgerung wir nur beyläufig anführen, da sie jetzt nicht zu unserem Zwecke dienet.

§. 23.

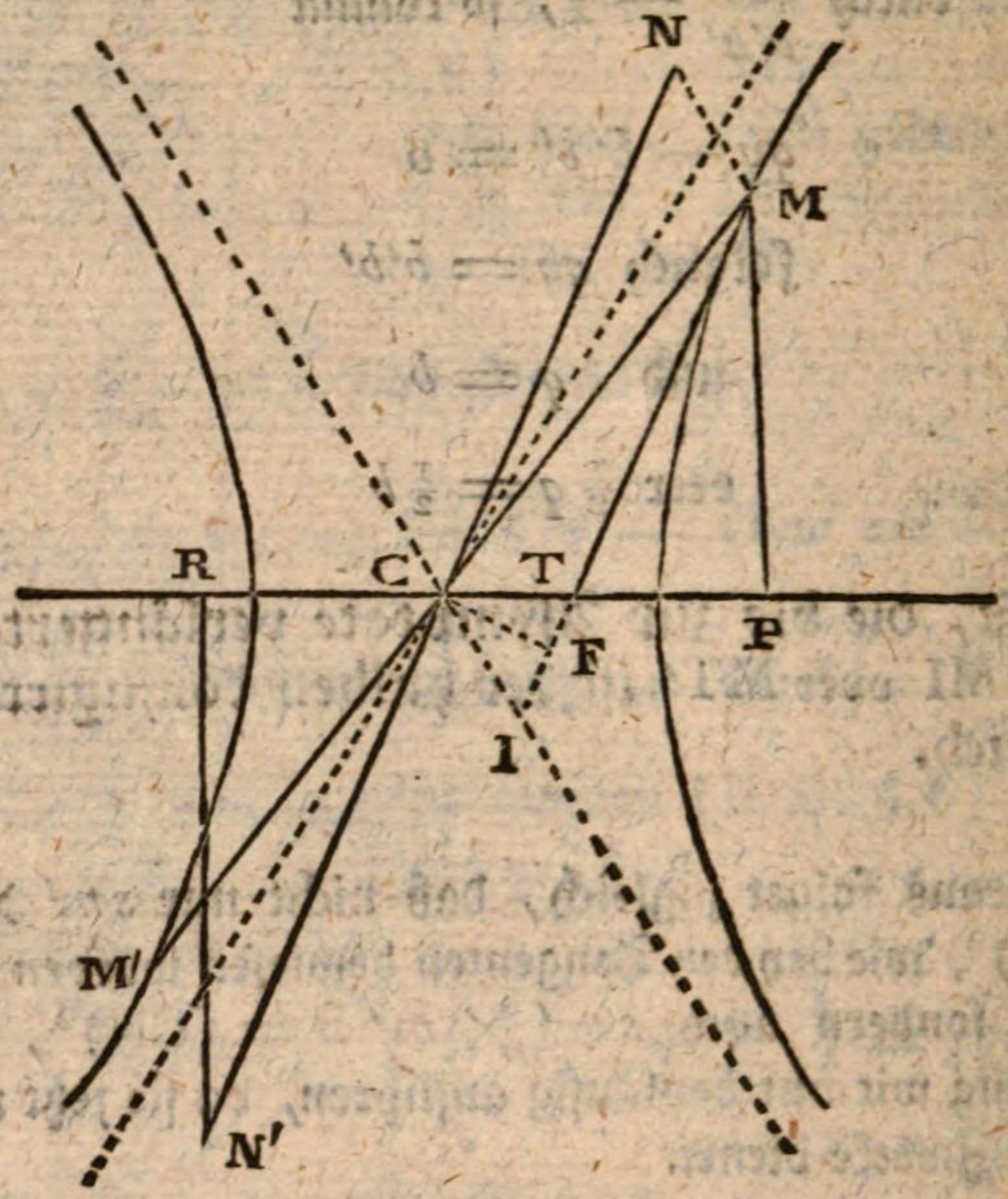
Wir hatten bewiesen (§. 21), daß

$$CF \times CN = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b$$

Da nun jezt auch bewiesen ist, daß CN = MI, so ist CNMIC ein Parallelogramm; dessen Fläche ist CF × MI Weil aber MI = CN, so ist

$$CF \times MI = CF \times CN = \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}b \text{ (§. 21)}$$

(Siehe die folgende Figur.)



das heißt, wo auch der Punkt M genommen werde, so ist das Parallelogramm CNMIC allemal gleich groß, und dem Rektangel aus beiden halben Axen gleich.

§. 24.

Die ähnlichen Dreiecke TPM, CRN' geben

$$TP, PM :: CR, RN'$$

$$\text{folglich } RN' = \frac{PM \times GR}{TP}$$

$$(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2.}{(TP)^2}$$

Nun

Nun ist (I. H. §. 30) $(PM)^2 = \frac{bb}{aa}(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)$

$$(CR)^2 = \zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$(PT)^2 = \frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{\zeta^2}$$

folglich

$$(RN)^2 = \frac{bb}{aa}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) : \frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{\zeta^2}$$

$$= \frac{bb}{aa}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2 \times \frac{\zeta^2}{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}$$

$$= \frac{bb\zeta\zeta}{aa}$$

Nun geben die rechtwinklichen Dreiecke CPM und CRN'

$$(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$$
$$(CN')^2 = (CR)^2 + (RN')^2$$

folglich ist

$$(CM)^2 - (CN')^2 = (CP^2) + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$$

Im zweiten Gliede der Gleichung setze man anstatt der Linien ihre algebraischen Werthe so ist

$$(CM)^2 - (CN')^2 = \zeta^2 + \frac{bb}{aa}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) - (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2) - \frac{b^2\zeta^2}{a^2}$$

$$= \zeta^2 + \frac{b^2\zeta^2}{a^2} - \tfrac{1}{4}b^2 - \zeta^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{b^2\zeta^2}{a^2}$$

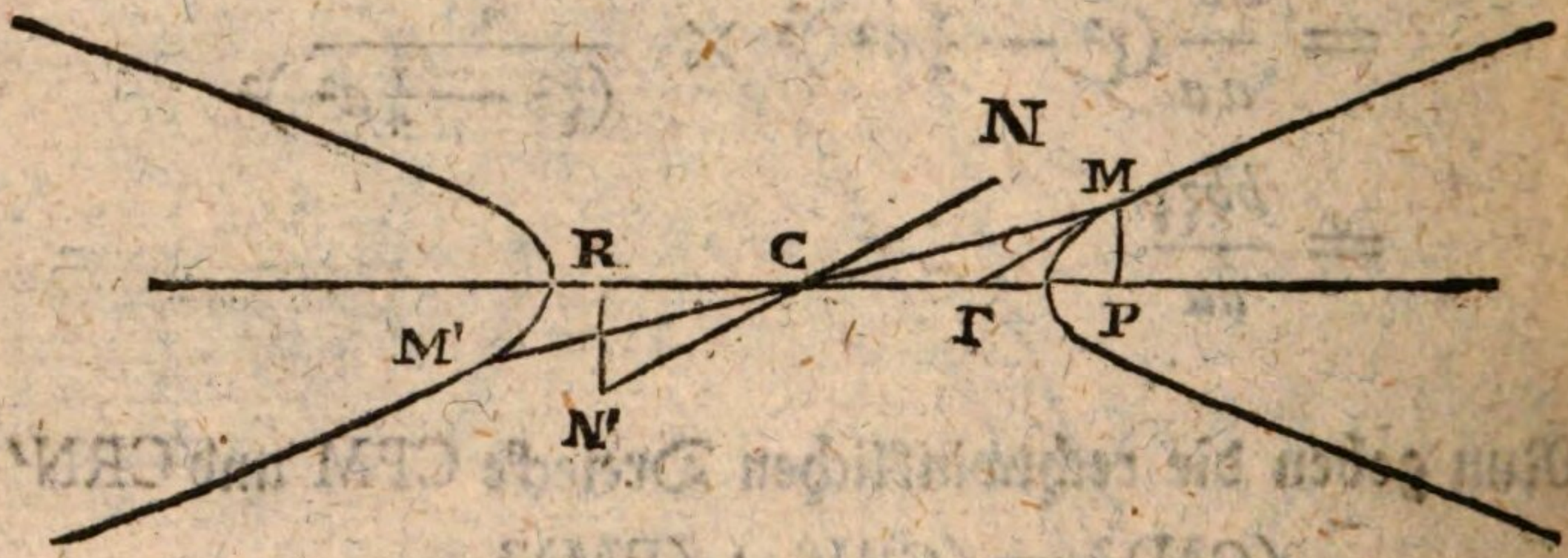
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2$$

woraus man siehet, daß die Differenz der Quadrate zweier konjugirten Diameter allemal einerlei, und der Differenz der Quadrate beider Axen gleich ist.

Hieraus folget zugleich, daß in der gleichseitigen Hyperbel jeder Diameter seinem konjugirten Diameter gleich sey. Denn da $(CM)^2 - (CN')^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2$, und da in der gleichseitigen Hyperbel $a = b$, so so ist $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}b^2$, folglich $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2 = 0$, folglich $(CM)^2 - (CN')^2 = 0$, folglich $(CM)^2 = (CN')^2$ folglich $CM = CN'$.

§. 25.

In die Gleichung $(CN'^2 = (CR)^2 + (RN')^2$
oder $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$



setze man anstatt CR und RN' deren algebraischen Werthe, so ist

$$(CN)^2 = \zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{b^2\zeta^2}{a^2}$$

Nun ist $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2$

$$(TM)^2 = \frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{\zeta^2} + \frac{b^2}{a^2}(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2). \quad (\text{§. 15})$$

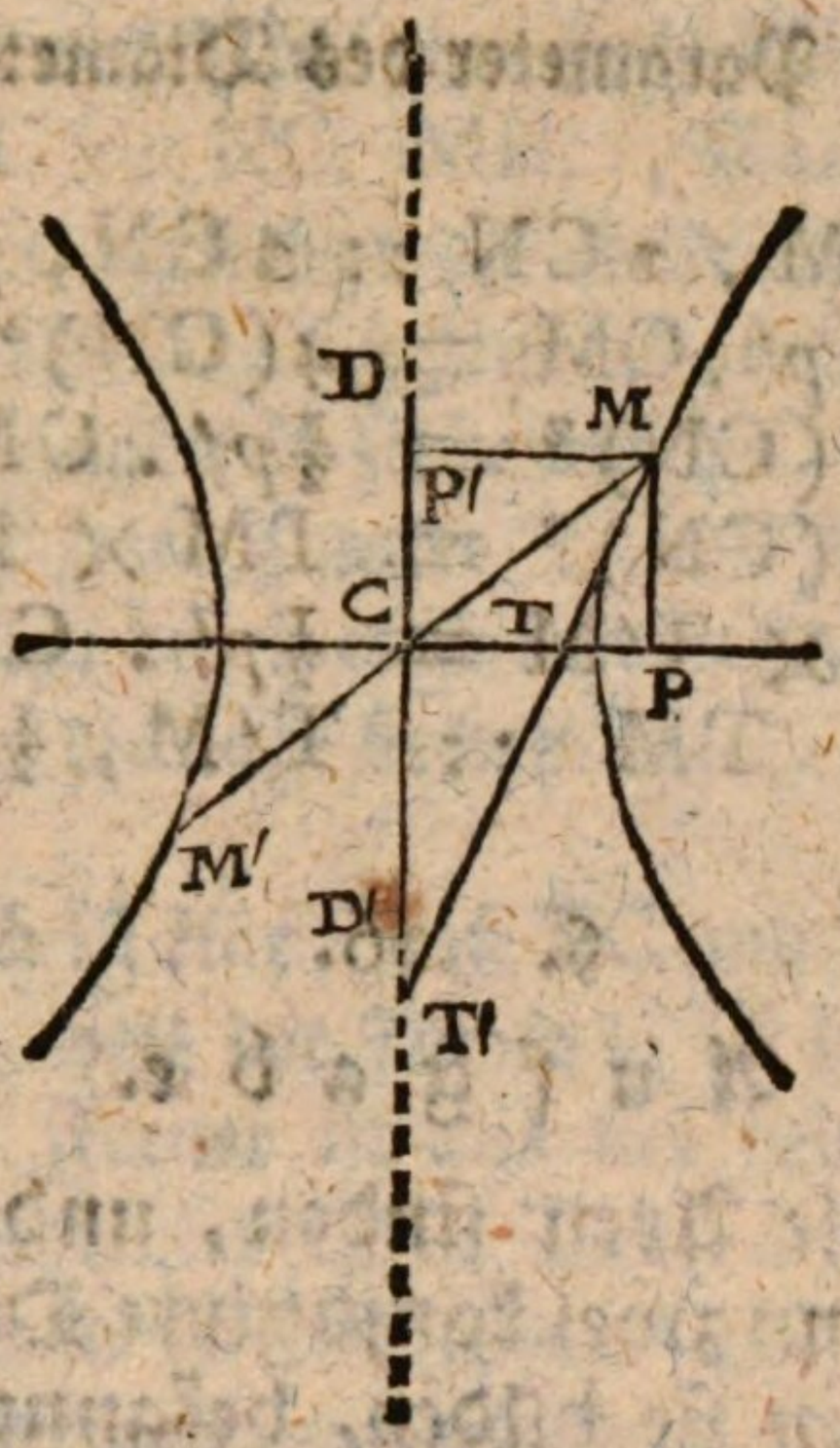
$$= \left(\frac{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}{\zeta^2} + \frac{b^2}{a^2}\right).(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$= (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{b^2\zeta^2}{a^2}).\frac{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}{\zeta^2}$$

Folglich ist $(TM)^2 = \frac{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}{\zeta^2} \times (CN)^2$

Es werde nun die zweite Axe DD' gezogen.
(Siehe die folgende Figur.)

Es



Es werde die Tangente MT bis in T' verlängert, und MP' mit der Hauptaxe parallel gezogen, so ist △MPT ∽ △MP'T', daher

$$PT, TM :: P'M, T'M$$
$$\text{oder } PT, TM :: CP, T'M$$
$$(PT)^2, (TM)^2 :: (CP)^2, (T'M)^2$$

$$\frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2)^2}{\zeta^2}, \frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2).(CN)^2}{\zeta^2} :: \zeta^2, (T'M)^2$$

$$(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^2, (\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2).(CN)^2 :: \zeta^2, (T'M)^2$$

$$(\zeta^2 - \tfrac{1}{4}a^2), \ldots\ldots\ldots (CN)^2 :: \zeta^2, (T'M)^2$$

$$\text{daher } (T'M)^2 = \frac{(CN)^2 . \zeta^2}{\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$\text{da nun } (TM)^2 = \frac{(\zeta^2 - \frac{1}{4}a^2).(CN)^2}{\zeta^2}$$

$$\text{so ist } (TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$$
$$\text{oder } TM \times T'M = (CN)^2$$

Wird

Wird nun der Parameter des Diameters MM′ mit p' bezeichnet, so ist

$$2CM, 2CN :: 2CN, p'$$

folglich $2p'.CM = 4(CN)^2$

$(CN)^2 = \frac{1}{2}p'.CM$

da auch $(CN)^2 = TM \times T'M$

so ist $TM \times T'M = \frac{1}{2}p'.CM$

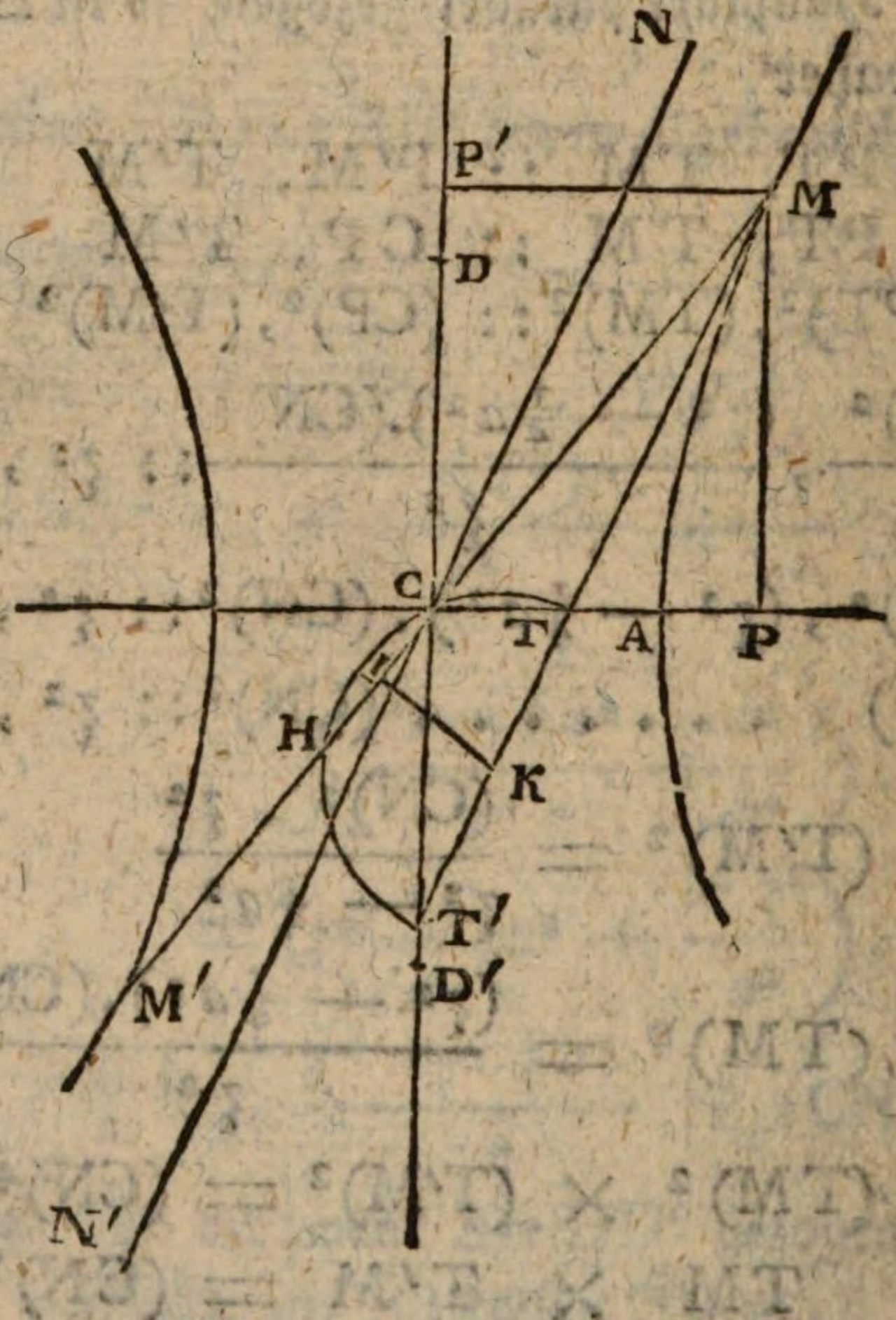
oder $CM, TM :: T'M, \frac{1}{2}p.$

§. 26.

Aufgabe.

Man soll die Axen finden, und die Hyperbel beschreiben, wenn zwei konjugirte Diameter, nebst dem Winkel, den sie bilden, bekannt sind.

Auflösung. Es seyen gegeben die Diameter MM′ und NN′ nebst ihrem Winkel MCN.



Man

Man nehme auf MM′ eine Linie MH $= \frac{1}{2}p'$, das ist, so daß MC, NC :: NC, MH. Man halbire CH in I, und errichte über derselben die senkrechte IK, welche die mit NN′ parallele MT′ irgendwo in K schneiden wird. Aus dem Mittelpunkte K ziehe durch C einen Kreis, welcher die MT′ in zwei Punkte T und T′ schneiden wird. Ziehe gerade Linien durch diese beiden Punkte und durch C, so geben dieselben die Lage beider Axen.

Denn erstlich ist klar, daß TC und T′C senkrecht auf einander stehen, weil der Punkt C in der Peripherie des Zirkels lieget. Ferner ist aus der gemeinen Geometrie bekannt, daß die Linien CM, TM, T′M, HM, welche alle aus dem Punkte M entspringen und den Zirkel schneiden, sich folgendermaaßen verhalten:

$$CM, TM :: T'M, HM$$

Da nun gemacht worden $HM = \frac{1}{2}p$, so ist

$$CM, TM :: T'M, \frac{1}{2}p$$

welche Proporzion, wie im vorigen Paragraph gelehret worden, bei der Hyperbel statt finden soll.

Um nun die Größe der Axen zu bestimmen, so fälle man aus M auf beide Axen die senkrechten Linien MP, MP′. Man mache CA der mittleren Proporzional-Linie gleich zwischen CT und CP, desgleichen mache man CD′ gleich der mittleren Proporzional-Linie zwischen CP′ und CT′, so sind CA und CD′ die Hälfte beider Axen.

Denn wir haben oben (§. 21) gefunden, daß

$$CT = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\zeta}$$

und da $CP = \zeta$

so ist $CT \times CP = \frac{1}{4}a^2$

oder $CT, \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a, CP$

Es ist ferner TP, PM :: TC, CT′

$$\frac{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}{z}, \frac{b}{a}\sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)} :: \frac{\frac{1}{4}a^2}{z} \text{ CT}'$$

$$(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2), \frac{b}{a}\sqrt{(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} :: \tfrac{1}{4}a^2, \text{ CT}'$$

$$\sqrt{(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}, \frac{b}{a} \quad . \quad . \quad . \quad :: \tfrac{1}{4}a^2, \text{ CT}'$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{(z^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}, \frac{b^2}{a^2} \quad . \quad . \quad . \quad :: \tfrac{1}{4}a^2, \text{ CT}'$$

$$\text{daher CT}' = \frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{b}{a}\sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)}}.$$

Es ist aber $\frac{b}{a}\sqrt{(z^2 - \frac{1}{4}a^2)} = \text{PM} = \text{CP}'$,

$$\text{also ist CT}' = \frac{\frac{1}{4}b^2}{\text{CP}'}$$

$$\text{oder} \quad \text{CP}', \tfrac{1}{2}b :: \tfrac{1}{2}b, \text{ CT}'$$

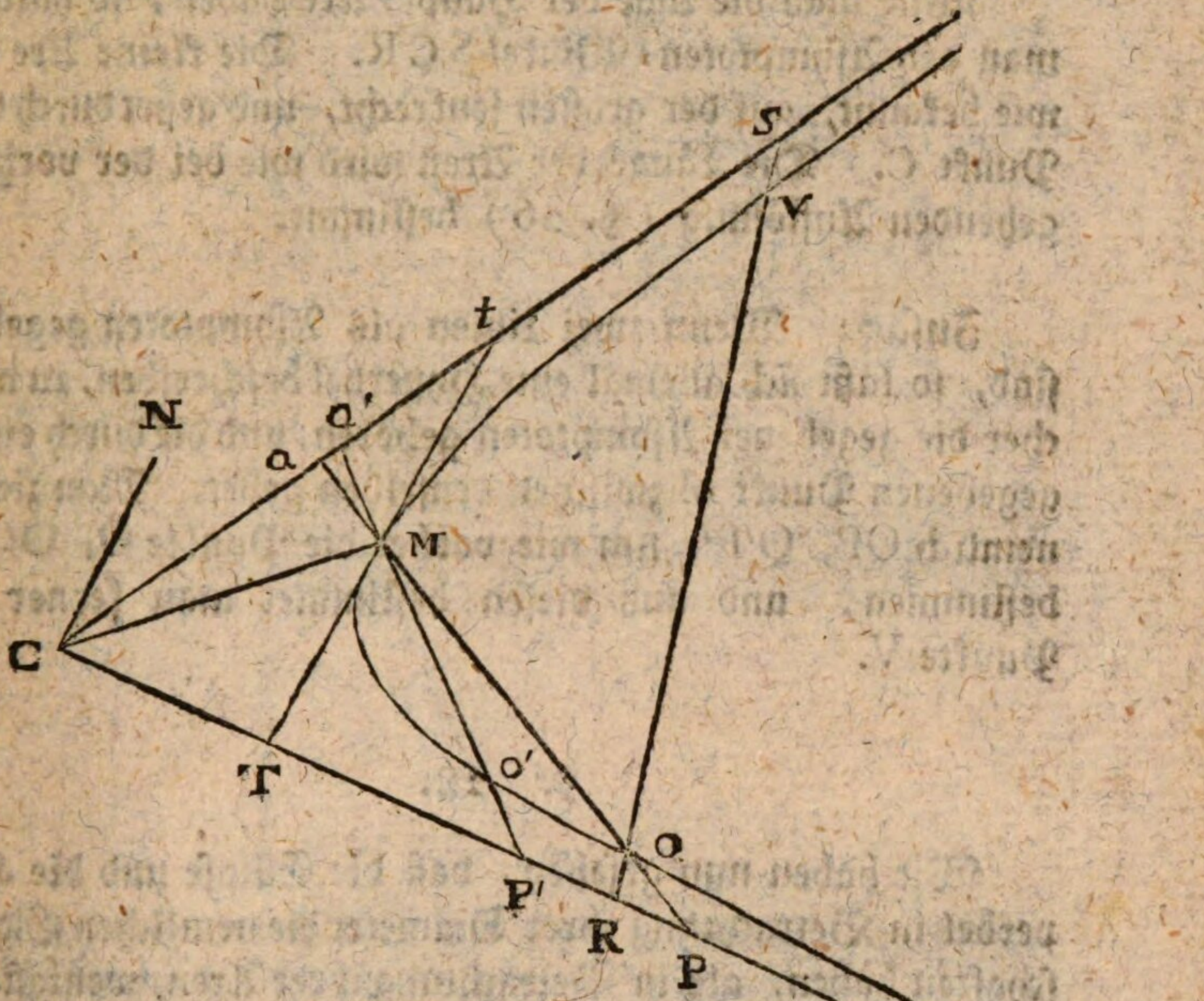
Wenn beide gegebene Diameter gleich sind, so ist auch der Parameter denselben gleich. In diesem Falle also, wird MH = MC, oder der Punkt H fällt auf dem Punkt C, und MC wird die Tangente des Zirkels. Um den Mittelpunkt K des Zirkels zu finden, braucht man also nur auf MC aus dem Punkte C eine senkrechte Linie zu errichten.

§. 27.

Aufgabe.

Vermittelst zweier gegebenen konjugirten Diameter, die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten beschreiben.

Auf-



Auflösung. Es sey gegeben der halbe Diameter CM und sein konjugirter Diameter CN, unter dem Winkel MCN.

Durch M ziehe tMT mit CN parallel, mache M t = MT = CN, ziehe gerade Linien Ct, CT, so sind diese die Asymptoten der Hyperbel (§. 22).

Durch den Punkt M ziehe willkührlich gerade Linien QMP, Q'MP', so viel du willst, so daß sie sich beiderseits in den Asymptoten endigen. Mache PO = QM, P'O' = Q'M, &c. so gehören die Punkte O, O' zur Hyperbel (II. Hauptst. §. 5)

Jeder Punkt O kann ferner dienen um andere Punkte der Hyperbel zu bestimmen. Denn man ziehe durch O die ROS, und mache SV = RO, so gehöret der Punkt V wiederum zur Hyperbel.

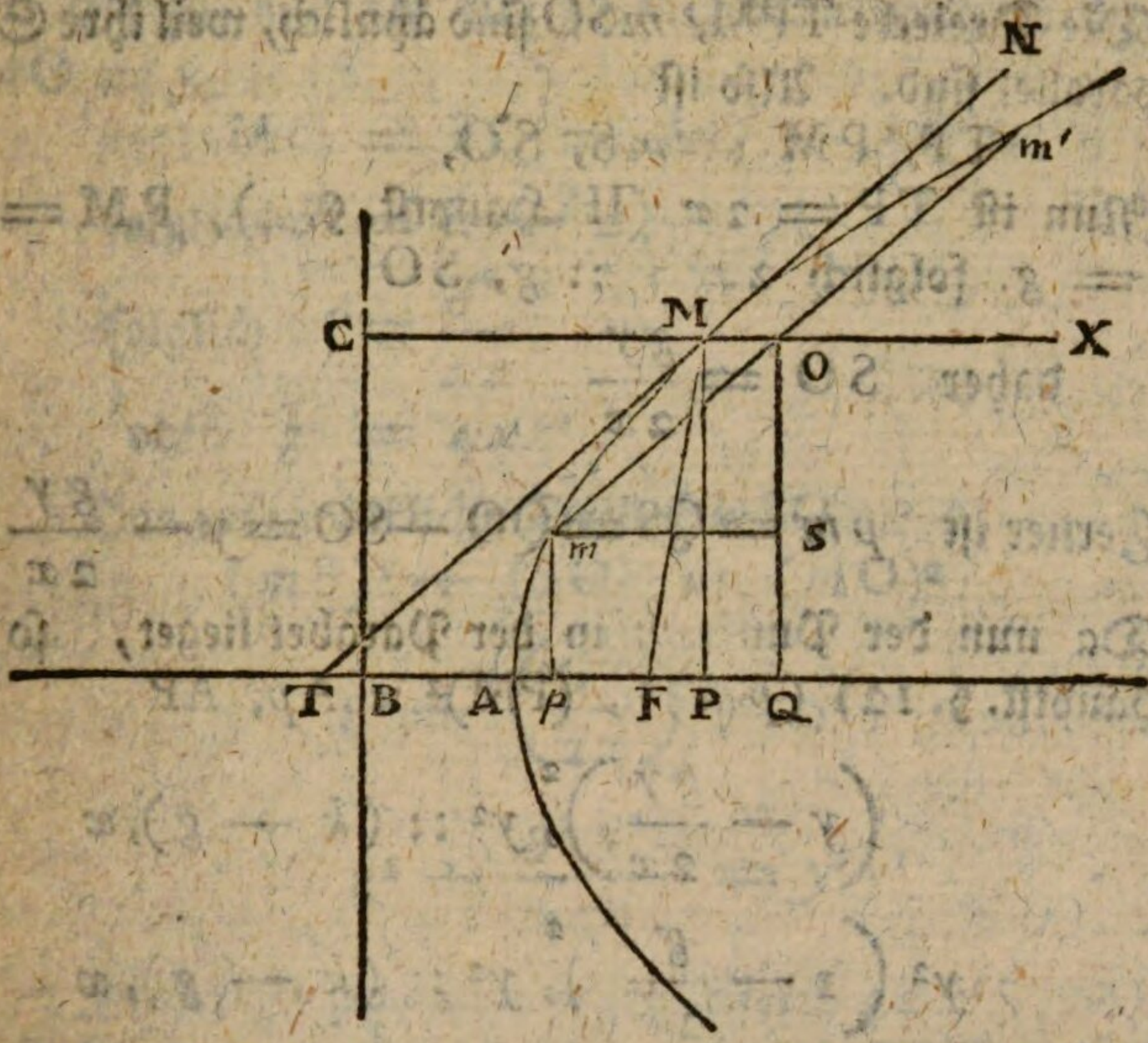
Will man die Lage der Haupt-Axe haben, so halbire man den Asymptoten-Winkel S C R. Die kleine Axe ist, wie bekannt, auf der großen senkrecht, und gehet durch den Punkt C. Die Länge der Axen wird wie bei der vorhergehenden Auflösung (§. 26) bestimmt.

Zusatz. Wenn zwei Linien als Asymptoten gegeben sind, so läßt sich allemal eine Hyperbel beschreiben, zu welcher die gegebenen Asymptoten gehören, und die durch einen gegebenen Puukt M zwischen denselben gehet. Man ziehet nemlich QP, Q'P', um wie vorher die Punkte O, O' zu bestimmen, und aus diesen bestimmet man ferner die Punkte V.

§. 28.

Wir haben nun gesehen, daß die Ellipse und die Hyperbel in Betrachtung ihrer Diameter die nemlichen Eigenschaften haben, als in Betrachtung ihrer Axen, wenigstens in allen Stücken, wo nicht nothwendig vorausgesetzet wird, daß der Koordinaten-Winkel ein rechter ist. Laßt uns nun sehen, ob dieses auch bei der Parabel eintrift.

Da die Parabel keinen Mittelpunkt hat, so muß man sie als eine Hyperbel oder Ellipse betrachten, deren anderer Brennpunkt in einer unendlichen Entfernung lieget. (I H. §. 34) Folglich ist auch der Mittelpunkt unendlich entfernet, und der Diameter wird mit der Axe parallel. Uebrigens findet hier kein konjugirter Diameter Statt.



Es sey demnach MX mit der Axe parallel, so ist MX ein Diameter der Parabel, und da der Parameter für die Axe viermal so groß ist, als die Entfernung des Ursprunges A der Axe vom Brennpunkt F, so wird auch hier 4MF der Parameter des Diameters MX genannt.

Durch M ziehe man die Tangente TN. Auf dem Diameter MX nehme man den willkührlichen Theil MO, und ziehe durch O die *m m'* mit TN parallel, so ist O*m* oder O*m'* die Applikate, welche zur Abzisse MO gehöret. Man wird bald sehen, daß diese Koordinaten sich eben so verhalten, wie auf der Axe.

Man fälle MP, *mp*, OQ senkrecht auf die Axe, und ziehe *m*S mit derselben parallel, wie bei der Ellipse und Hyperbel geschehen. Es sey nun

$$AP = x$$
$$PM = QO = y$$
$$Qp = mS = g$$
$$AQ = k$$

so ist $Ap = AQ - Qp = k - g$

Die

Die Dreiecke TPM, mSO sind ähnlich, weil ihre Seiten parallel sind. Also ist

$$TP, PM :: mS, SO,$$

Nun ist $TP = 2x$ (II. Hauptst. §. 4), $PM = y$, $mS = g$, folglich $2x, y :: g, SO$

$$\text{daher } SO = \frac{gy}{2x}$$

Ferner ist $pm = QS = QO - SO = y - \frac{gy}{2x}$

Da nun der Punkt m in der Parabel lieget, so ist (I. Hauptst. §. 12) $(pm)^2, (PM)^2 :: Ap, AP$

$$\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2, y^2 :: (k - g), x$$

$$y^2\left(1 - \frac{g}{2x}\right)^2, y^2 :: (k - g), x$$

$$\left(1 - \frac{g}{2x}\right)^2, 1 :: (k - g), x$$

$$\left(\frac{2x - g}{2x}\right)^2, 1 :: (k - g), x$$

$$\frac{(2x - g)^2}{4x^2}, 1 :: (k - g), x$$

$$k - g = \frac{(2x - g)^2}{4x}$$

$$k - g = \frac{4x^2 - 4gx + g^2}{4x}$$

$$k - g = x - g + \frac{g^2}{4x}$$

$$k \ldots = x + \frac{g^2}{4x}$$

$$k - x = \frac{g^2}{4x}$$

Es sey nun die Abzisse $MO = x'$ und die Applikate $mO = y$, so ist

$$MO = PQ = AQ - AP = k - x$$

folglich $x' = k - x$

folglich $x' = \frac{g^2}{4x}$

oder $g^2 = 4xx'$

Das rechtwinkliche Dreieck mSO giebt

$$(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$$

$$g^2 + \left(\frac{gy}{2x}\right)^2 = y'y'$$

$$g^2 + \frac{g^2 y^2}{4x^2} = y'y'$$

Anstatt g^2 setze man dessen Werth $4xx'$, und anstatt y^2 setze man dessen Werth px, wo p der Parameter der Axe ist, so kömmt

$$4xx' + \frac{4xx' \cdot px}{4x^2} = y'y'$$

$$4xx' + px' = y'y'$$

$$(4x + p)\, x' = y'y'$$

Es sey nun p' der Parameter des Diameters MX, so ist $p' = 4FM$, wie oben angenommen worden. Ist nun BC die Direktrize der Parabel, so ist $FM = MC = BP = AP + AB = AP + \frac{1}{4}p = x + \frac{1}{4}p$. Da nun

$$FM = x + \tfrac{1}{4}p$$

so ist $4FM = p' = 4x + p$

und weil $(4x + p)\, x' = y'y'$

so wird $p'x' = y'y'$

woraus man siehet, daß bey jedem Diameter das Quadrat $(y'y')$ der Applikate gleich ist dem Rektangel $(p'x')$ aus der Abzisse und aus dem Parameter

des

des Diameters, welches auch bei der Axe Statt findet. Woraus denn wiederum folget, daß auch hier die Quadrate der Applikaten sich verhalten wie die Abzissen. Ferner ist $Om' = Om$, weil $y' = \pm\sqrt{(p'x')}$.

§. 29.

Aufgabe.

Es ist ein Diameter MX der Parabel, dessen Ursprung im M ist, sammt dem Koordinaten-Winkel, und dem Parameter p' gegeben, man soll die Parabel beschreiben.

Auflösung. Man ziehe durch M die Linie NMT von unbestimmter Länge, und so daß sie mit MX den gegebenen Winkel bilde.

Aus dem Punkte M ziehe MF von unbestimmter Länge, so daß $\angle TMF = \angle NMX$, so gehet MF nach dem Brennpunkte der Parabel. (II. H. §. 2)

Man mache $MF = \frac{1}{4}p'$, so ist F der Brennpunkt.

Durch F ziehe eine Linie TQ von unbestimmter Länge mit MX parallel, so ist diese TQ die Axe, welche die Tangente in T schneidet.

Fälle MP senkrecht auf die Axe, so ist PT die Subtangente für den Punkt M.

Halbire PT in A, so ist A der Scheitel der Parabel (II. H. §. 4.)

Da nun der Brennpunkt F und der Scheitel A gefunden sind, so ist es nicht schwer die Parabel zu beschreiben.

Viertes Hauptstück.

Von der Konstrukzion der Gleichungen des zweiten Grades vermittelst der Kegelschnitte.

§. 1.

Aus allem, was bisher on den Kegelschnitten gelehret worden, folget, daß einige Gleichungen des zweiten Grades zwischen zwei unbekannten Größen unmittelbar und ohne Veränderung, vermöge der Kegelschnitte, konstruiret, oder geometrisch ausgedrücket werden können.

§. 2.

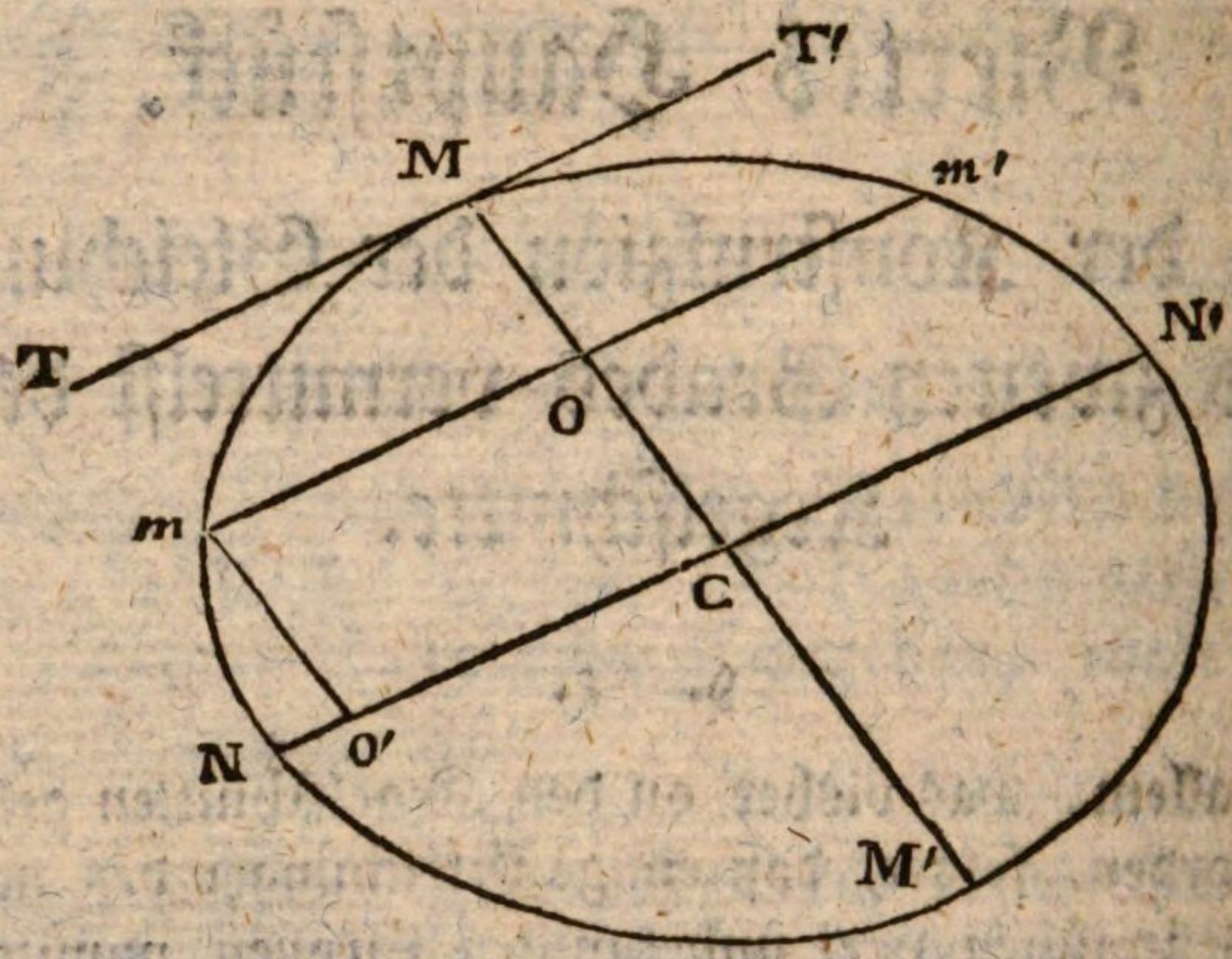
Wenn die Gleichung eine solche Gestalt hat

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)$$

so brauchet man nur eine Ellipse zu zeichnen, wovon die große Axe $= a$, und die kleine $= b$ sey, oder wovon ein Diameter $= a$, und sein konjugirter Diameter b sey, so ist das Verhältniß jeder zwei Koordinaten das nemliche, als das Verhältniß der Größen x und y in der gegebenen Gleichung. Sind die Größen a und b in Zahlen gegeben, so kann man sie leicht in Linien verwandeln, so bald man nur eine willkührliche Einheit annimmt. Ebenfalls wird eine solche Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\tfrac{1}{4}b^2 - x^2\right)$$

welche mit der vorigen einerlei ist, vermittelst der Ellipse konstruiret, nur wird hier b zum Hauptdiameter und a zum konjugirten Diameter.



Denn es sey $MM' = a$, $NN' = b$, $CO = x$, Om oder $Om' = y$, so ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)$$

Ziehe mO' mit OC parallel, so ist $COmO'$ ein Parallelogramm, und $CO = mO'$, $mO = CO'$. Wollen wir nun die Abzissen auf dem konjugirten Diameter NN' nehmen, so wird $CO' = x' = mO = y$

und $mO' = y' = CO = x$

Setzet man nun in die gegebene Gleichung x' anstatt y, und y' anstatt x, so ist

$$x'x' = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - y'y'\right)$$

$$\frac{a^2}{b^2}x'x' = \tfrac{1}{4}a^2 - y'y'$$

$$y'y' = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{b^2}x'x'$$

$$y'y' = \frac{a^2}{b^2}\left(\tfrac{1}{4}b^2 - x'x'\right)$$

dar-

Daraus siehet man zugleich, daß die Gleichung die nemliche Gestalt behält, man mag den einen oder andern von zwei konjugirten Diametern zur Direktrisse oder zum Hauptdiameter annehmen.

Wenn b dem a gleich ist, so bekömmt man

$$y^2 = (\tfrac{1}{4}a^2 - x^2)$$

welche Gleichung das Verhältniß der Koordinaten im Zirkel ausdrücket, dessen Durchmesser dem a gleich gemacht wird. Man merke aber wohl, daß diese Konstruktzion sonst nicht gebrauchet werden kann, als wenn man den Koordinaten-Winkel $= 90^{0}$ annimmt. Denn bei jedem anderen Koordinaten-Winkel muß man eine Ellipse gebrauchen, und in derselben die beiden konjugirten Diameter nehmen, welche einander gleich sind. (III. H. § 8.).

§. 3.

Wenn die gegebene Gleichung diese Form hat

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)$$

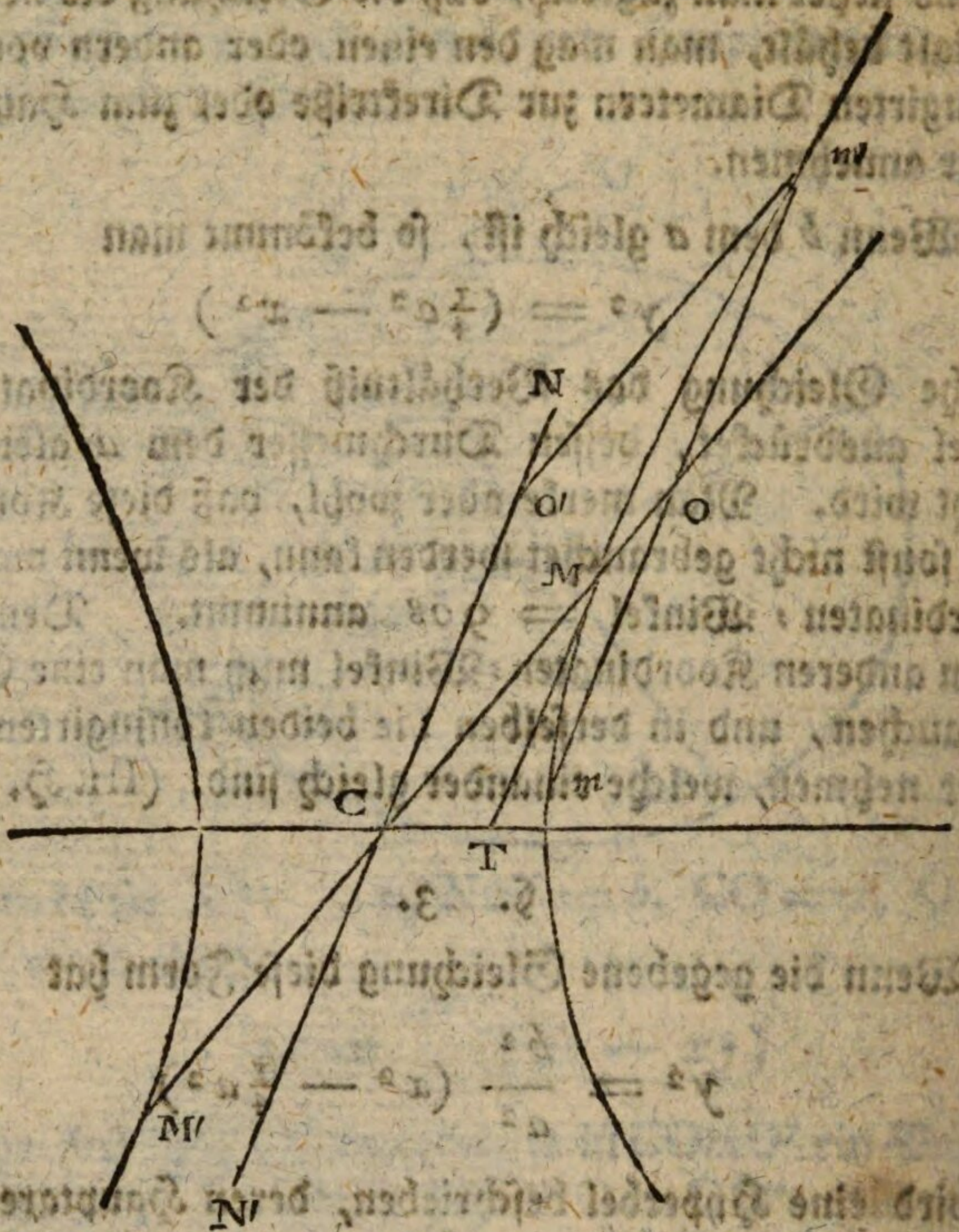
so wird eine Hyperbel beschrieben, deren Hauptaxe $= a$ und deren konjugirte Axe $= b$ sey, da dann jede Abzisse x und jede Applikate y vorstellet.

Hat aber die Gleichung diese Gestalt

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + \tfrac{1}{4}b^2)$$

so wird sie zwar wiederum vermittelst der Hyperbel konstruiret, und es ist auch hier die Axe, welche sich in der Hyperbel endiget $= a$, und die damit konjugirte Axe $= b$; es werden aber die Abzissen auf der Axe b genommen.

Was hier von beiden Axen a und b gesaget wird, kann ebenfalls von einem Diameter a und seinem konjugirten Diameter b verstanden werden.



Denn es sey CM = a der Diameter, welcher sich in der Hyperbel endiget, und CN der konjugirte Diameter, CO = x, Om' = y. Nun ziehe man m'O' mit dem Diameter CM parallel, und es sey CO' = x', m'O' = y', so ist x' = CO' = m'O = y, und y' = m'O' = CO = x. Es ist aber in Betrachtung des Hauptdiameters CM

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2\right)$$

Setzet man nun x' anstatt y, und y' anstatt x, so wird

$$x'x' = \frac{b^2}{a^2}(y'y' - \tfrac{1}{4}a^2)$$

$$\frac{a^2}{b^2}x'x' = y'y' - \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\frac{a^2}{b^2}x'x' + \tfrac{1}{4}a^2 = y'y'$$

$$\frac{a^2}{b^2}(x'x' + \tfrac{1}{4}b^2) = y'y'$$

woraus zugleich erhellet, daß die Gleichung der Hyperbel, in Betrachtung des konjugirten Diameters, nicht die nemliche ist, als wenn die Abzissen auf dem Diameter genommen werden, der sich in der Hyperbel endiget.

§. 4.

Die Gleichung

$$y^2 = px$$

wird vermittelst einer Parabel konstruiret. Der Diameter ist willkührlich, und dessen Parameter ist p. Werden die Koordinaten rechtwinklich angenommen, so wird der Diameter zur Axe und p ist der Parameter der Axe, oder der eigentliche Parameter der Parabel.

§. 5.

Die Gleichung

$$xy = a^2$$

wird vermittelst einer Hyperbel zwischen ihren Asymptoten konstruiret. Die Potenz der Hyperbel ist a^2, die Abzissen x werden vom Mittelpunkte auf der einen Asymptote genommen, und die Applikaten y werden mit der anderen Asymptote parallel gezogen.

§. 6.

Eine gegebene Gleichung muß oft etwas verändert werden, bevor sie die Gestalt einer der vorher angeführten bekomme, und durch Kegelschnitte konstruirt werden könne.

Es sey gegeben eine solche Gleichung

$$ncd - qy^2 = gx^2$$

$$\text{so ist } qy^2 - ncd = -gx^2$$

$$qy^2 = ncd - gx^2$$

$$y^2 = \frac{ncd}{q} - \frac{g}{q}x^2$$

$$y^2 = \frac{1}{q}(ncd - gx^2)$$

$$y^2 = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - x^2\right)$$

Unter dieser Gestalt siehet man leicht, daß die Gleichung vermöge einer Ellipse konstruirt werden kann. Denn vergleichet man sie mit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$ so siehet man, daß da seyn muß

$$\frac{ncd}{g} = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{4ncd}{g} = a^2$$

$$\sqrt{\frac{4ncd}{g}} = a$$

Ferner muß seyn

$$\frac{g}{q} = \frac{b^2}{a^2}$$

oder weil $a^2 = \frac{4ncd}{g}$

so ist $\frac{g}{q} = b^2 : \frac{4ncd}{g}$

oder $\frac{g}{q} \times \frac{4ncd}{g} = b^2$

oder $\frac{4ncd}{q} = b^2$

oder $\sqrt{\frac{4ncd}{q}} = b$

Es muß demnach eine Ellipse gemacht werden, deren Haupt-Diameter, worauf die Abzissen genommen werden, gleich sey $\sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, und wozu der konjugirte Diameter gleich sey $\sqrt{\frac{4ncd}{q}}$. Auch kann, wenn man die Koordinaten rechtwinklicht machet $\sqrt{\frac{4ncd}{g}}$ zur Haupt-Axe, und $\sqrt{\frac{4ncd}{q}}$ zur Neben-Axe genommen werden. Alsdann wird jedes Paar Koordinaten das Verhältniß der Größen x und y, die in der gegebenen Gleichung enthalten sind, ausdrücken.

§. 7.

Da es in manchen Fällen schwerer fällt einer Gleichung vom zweiten Grade die gehörige Gestalt zu geben, um sie vermittelst der Kegelschnitte zu konstruiren, so müssen wir überhaupt lehren, auf welche Art solches geschehen kann. Daraus wird man zugleich sehen, daß in der That

keine Gleichung vom zweiten Grade erdenklich ist, die nicht durch Kegelschnitte konstruiret werden könne. Nur zwei Ausnahmen finden hier Statt.

Erstlich kann die Gleichung nicht konstruiret werden, wenn sie an sich selbst ein unmögliches Verhältniß anzeiget, wie wir bald sehen werden.

Zweitens kann die Gleichung nicht durch Kegelschnitte konstruiret werden, wenn sie ein Produkt zweier einfacher Gleichungen ist. Denn in diesem Falle würde die geometrische Konstrukzion nicht durch eine krumme Linie, sondern durch zwei gerade Linien geschehen. Z. E. Diese Gleichung $10x^2 - 27xy + 18y^2 + 6x - 3y - 28 = 0$ entstehet, wenn man

$$2x - 3y + 4 = 0$$

und $5x - 6y - 7 = 0$

mit einander multiplizirt. Also ist in der gegebenen Gleichung

$$3y - 4 = 2x$$

und $6y + 7 = 5x$

oder $$y - \tfrac{4}{3} = \frac{2x}{3}$$

und $$y + \tfrac{7}{6} = \frac{5x}{6}$$

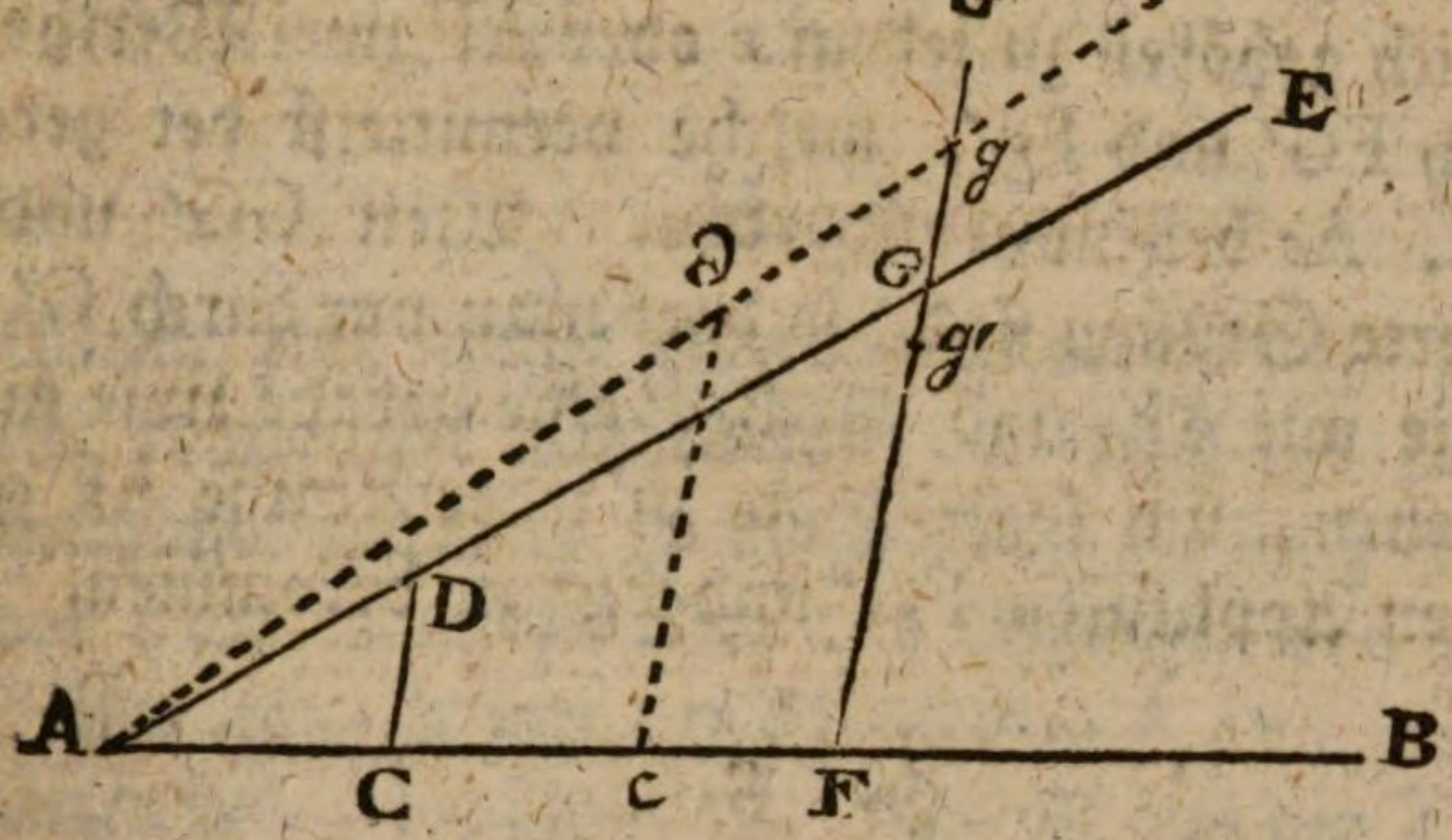
Laß uns $y - \frac{4}{3}$ mit z und $y + \frac{7}{6}$ mit u bezeichnen, so

ist $$z = \frac{2x}{3}$$

$$u = \frac{5x}{6}$$

Man

Man ziehe eine Direktrisse AB, nehme



auf derselben $AC = 3$, und errichte unter einem beliebigen Winkel $CD = 2$. Durch A und D ziehe man eine gerade Linie AE. Man ziehe eine beliebige Applikate FG mit CD parallel, und benenne FG mit z, AF mit x, so ist

$$AF, FG :: AC, CD$$
$$x, z :: 3, 2$$
$$\text{also } 3z = 2x$$
$$\text{oder } z = \frac{2x}{3}$$

Es ist aber $z = y - \frac{4}{3}$, also $y = z + \frac{4}{3}$. Es sey $GG' = \frac{4}{3}$, so ist $FG' = y$.

Um nun zugleich die andere Gleichung $u = \frac{5x}{6}$ zu konstruiren, so nimm $Ac = 6$, und $cd = 5$ mit CD parallel, ziehe A*de*, so ist

$$AF, Fg :: Ac, cd$$

und, wenn wie vorher $AF = x$, hingegen $Fg = u$ gesetzet wird, so ist

$$x, u :: 6, 5$$
$$\text{oder } 6u = 5x$$
$$\text{oder } u = \frac{5x}{6}$$

Er war aber $u = y + \frac{z}{\delta}$, also $y = u - \frac{z}{\delta}$. Nimm also $gg' = \frac{z}{\delta}$, so ist $Fg' = y$

Folglich gehören zu jedem x oder AF zwei Werthe von y, nemlich FG' und Fg', welche vermittelst der geraden Linien AE, Ae bestimmet werden. Weil GG' und gg' unveränderte Größen sind, so darf man nur durch G' eine gerade Linie mit AE, und durch g' eine gerade Linie mit Ae parallel ziehen, um sogleich die zu jeder Abzisse AF gehörigen beiden Applikaten FG' und Fg' zu bekommen.

§. 8.

Wenn wir beide angezeigten Ausnahmen zur Seite legen, so kann jede Gleichung des zweiten Grades vermittelst der Kegelschnitte konstruiret werden, wenn man nur vorher der Gleichung die gehörige Gestalt giebet, wie wir jezt lehren wollen.

Eine Gleichung des zweiten Grades von zwei unbekannten Größen t und u kann weiter nichts enthalten, als t^2, ut, u^2, t, u, jedes allenfalls mit einer bekannten Größe multipliziret, und noch eine bloß bekannte Größe. Die bekannten Größen können ferner positiv oder negativ seyn. Jedoch kann man anfänglich allenthalben das Zeichen $+$ setzen, die Rechnung muß in der Folge die Fälle unterscheiden, wo $+$ oder $-$ Statt findet.

Es sind demnach alle mögliche Gleichungen des zweiten Grades von zwei unbekannten Größen in der folgenden Formel enthalten:

$$dt^2 + cut + eu^2 + ft + geu + hd^2 = o$$

wo t und u die beiden unbekannten Größen, hingegen d, c, e, f, g, h lauter bekannte Koeffizienten vorstellen. Ordiniret man diese Gleichung in Rücksicht auf t, als wenn u bekannt wäre, so bekömmt sie diese Gestalt

$$dt^2 + (cu + fd)t + (eu^2 + geu + hd^2) = o$$

oder,

oder, wenn t^2 ohne Koeffizient seyn soll

$$A)\ t^2 + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \left(\frac{eu^2}{d} + \frac{geu}{d} + hd\right) = 0$$

§. 9.

Wenn eine solche Gleichung vermittelst der Kegelschnitte konstruiret werden soll, so muß der zweite Satz weggeschaffet werden, so wohl wenn sie nach den Potenzen von t als wenn sie nach den Potenzen von u ordiniret ist. Wir fangen mit der Gleichung A an, die nach den Potenzen von t ordiniret ist. Es ist aus der Algebra bekannt, daß der zweite Satz einer Gleichung weggeschaffet wird, wenn man anstatt der unbekannten Größe eine andere in die Gleichung bringet, die um die Hälfte des Koefsizienten des zweiten Satzes grösser oder kleiner ist, nachdem dieser Koeffizient positiv oder negativ ist. Es sey demnach

$$t + \tfrac{1}{2}\left(f + \frac{cu}{d}\right) = y$$

$$\text{oder } t = y - \tfrac{1}{2}\left(f + \frac{cu}{d}\right)$$

$$\text{folglich } t^2 = y^2 - y\left(f + \frac{cu}{d}\right) + \tfrac{1}{4}\left(f + \frac{cu}{d}\right)^2$$

Substituiret man diese Werthe von t^2 und t in die Gleichung A, so wird in derselben

$$t^2 = y^2 - y\left(f + \frac{cu}{d}\right) + \tfrac{1}{4}\left(f + \frac{cu}{d}\right)^2$$

$$\left(f + \frac{cu}{d}\right)\cdot t = + y\left(f + \frac{cu}{d}\right) - \tfrac{1}{2}\left(f + \frac{cu}{d}\right)^2$$

$$\text{also } t^2 + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t = y^2 - \tfrac{1}{4}\left(f + \frac{cu}{d}\right)^2$$

Folgs

Folglich wird die Gleichung A in folgende verwandelt

$$y^2 - \tfrac{1}{4}\left(f + \frac{cu}{d}\right)^2 + \frac{eu^2}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0$$

$$y^2 - \tfrac{1}{4}f^2 - \frac{cfu}{2d} - \frac{c^2u^2}{4d^2} + \frac{eu^2}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0$$

oder, wenn man mit $4d^2$ multipliziret

$$4d^2y^2 - d^2f^2 - 2cdfu - c^2u^2 + 4edu^2 + 4degu + 4hd^3 = 0$$

oder

$$4d^2y^2 = (f^2d^2 - 4hd^3) + (2cdf - 4deg)\,u + (c^2 - 4ed)u^2$$

Es sey nun der Kürze halben

$(f^2d^2 - 4hd^3) = r$, $(2cdf - 4deg) = q$, $(c^2 - 4ed) = m$,

so haben wir $4d^2y^2 = r + qu + mu^2$

wo die Größen r, q, m entweder positiv oder negativ seyn können, nachdem der Werth der Buchstaben c, d, e, f, g, h beschaffen ist.

Wenn wir diese Gleichung nach den Potenzen von u ordnen, so haben wir $mu^2 + qu + r = 4d^2y^2$

Weil die höchste Potenz von u ohne Koeffizient seyn muß, so dividire man alles durch m, dann bekömmt man

$$\text{B)}\quad u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m}\cdot y^2$$

§. 10.

Soll nun die gefundene Gleichung B durch Kegelschnitte konstruiret werden, so muß wiederum der zweite Satz weggeschaffet werden.

Dies

Dieses wollen wir hier auf eine etwas andere Art verrichten, als vorher geschehen ist, weil wir dadurch gerader zu unserem Zwecke kommen werden. Anstatt nemlich, daß wir bloß annehmen könnten

$$u + \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right) = z$$

so wollen wir annehmen, es sey

$$u + \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right) \cdot \frac{x}{n}$$

wo x eine neue unbekannte Größe ist, wovon ein gewisser $n$ter Theil, wenn er mit $\frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)$ multiplizirt wird, der um $\frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)$ vermehrten Größe u gleich seyn soll. Den Theiler n werden wir bald bestimmen. Aus dem angenommenen Verhältnisse folget

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right) \cdot \frac{x}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)$$

$$u^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{x^2}{n^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{x}{n} + \tfrac{1}{4}\frac{q^2}{m^2}$$

Nun wird $\frac{q}{m}u = \ldots + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{x}{n} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{m^2}$

also $u^2 + \frac{q}{m}u = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{x^2}{n^2} \ldots - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{m^2}$

Folglich wird die Gleichung B in folgende verwandelt

$$\tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \frac{x^2}{n^2} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{m^2} + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m} y^2$$

oder

$$\frac{q^2}{4m^2n^2} \cdot x^2 - \frac{q^2}{4m^2} + \frac{r}{m} = \frac{4d^2}{m} \cdot y^2$$

oder

oder wenn man alles mit m multiplizirt

$$\frac{q^2}{4mn^2} \cdot x^2 - \frac{q^2}{4m} + r = 4d^2 \cdot y^2$$

oder, wenn man durch $4d^2$ dividiret

$$\frac{q^2}{16mn^2d^2} \cdot x^2 - \frac{q^2}{16md^2} + \frac{r}{4d^2} = y^2$$

oder

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2} x^2 + \left(\frac{r}{4d^2} - \frac{q^2}{16md^2} \right)$$

Man dividire was in Haken eingeschlossen ist durch

$$\frac{q^2}{16mn^2d^2}$$

$$\left(\frac{r}{4d^2} - \frac{q^2}{16md^2} \right) : \frac{q^2}{16mn^2d^2}$$

$$\left(\frac{r}{4d^2} - \frac{q^2}{16md^2} \right) \times \frac{16mn^2d^2}{q^2}$$

$$\frac{16.r.m.n^2.d^2}{4.d^2.q^2} - \frac{16.q^2.m.n^2.d^2}{16.m.d^2.q^2}$$

$$\frac{4rmn^2}{q^2} - n^2$$

Nun multiplizire man den Quozienten wiederum mit dem Divisor, so ist

$$\frac{q^2}{16mn^2d^2} \left(\frac{4rmn^2}{q^2} - n^2 \right) = \frac{r}{4d^2} - \frac{q^2}{16md^2}$$

folg:

folglich ist

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}x^2 + \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(\frac{4rmn^2}{q^2} - n^2\right)$$

$$y^2 = \frac{q^1}{16mn^2d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4rmn^2}{q^2}\right)$$

Diese Gleichung gehöret zu einer Ellipse oder einer Hyperbel. Es ist x die Abzisse, y die Applikate, $\frac{4rmn^2}{q^2} - n^2$ ist das Quadrat des halben Haupt-Diameters, und $\frac{q^2}{16mn^2d^2}$ ist das Verhältniß beider Diameter.

§. 11.

Nun frägt es sich ferner, in welchen Fällen die gefundene Gleichung durch die Ellipse oder durch die Hyperbel konstruiret werden muß.

Weil die Grössen q^2, n^2 und d^2 Quadrate sind, so sind sie allemal positiv und verursachen keine Veränderung, es mögen q, n und d entweder positiv oder negativ seyn. Auf die Grösse r kömmt es auch nicht an, denn wenn sie auch negativ wäre, so würde doch dabei das Quadrat x^2 positiv bleiben, wie es ist. Hingegen muß man auf m desto mehr aufmerksam seyn. Denn ist m negativ, so bekömmt die Gleichung folgende Gestalt:

$$y^2 = \frac{q^2}{-16mn^2d^2}\left(x^2 - n^2 - \frac{4mrn^2}{q^2}\right)$$

oder

$$y^2 = -\frac{q^2}{16mn^2d^2} \times -\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

das ist

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

Da

Da in dieser letzten Gleichung x^2 negativ wird, so gehöret die Gleichung zur Ellipse. Hieraus siehet man, daß, wenn m negativ ist, die Gleichung zur Ellipse gehört; daß aber, wenn m positiv ist, die Gleichung zur Hyperbel gehört.

Es stellet aber m die Differenz $c^2 - 4de$ vor (§. 9.). Diese Größe wird negativ wenn $4de > c^2$, und positiv, wenn $4de < c^2$, und hierbey können d und e entweder alle beide positiv oder alle beide negativ seyn.

Wenn also solche Gleichung

$$dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = o$$

gegeben ist, so quadrire man den Koeffizienten c des Produkts ut. Von dem Quadrate subtrahire man das vierfache Produkt der Koeffizienten von t^2 und u^2. Ist der Rest negativ, so gehöret die Gleichung zur Ellipse. Ist aber der Rest positiv, so gehöret die Gleichung zur Hyperbel.

§. 12.

Wenn die Gleichung zur Ellipse gehöret, so fanden wir, daß sie eigentlich diese Gestalt bekäme

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

Ist dabei r negativ, so bekömmt man

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 - \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

$$\text{oder } y = \pm\sqrt{\frac{q^2}{16mn^2d^2}}\sqrt{\left(n^2 - \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)}$$

Wäre hier $\frac{4mrn^2}{q^2}$ größer als n^2, so würde alles

was

was unter dem Wurzelzeichen stehet, negativ, und folglich der Werth von y imaginär. Wenn aber

$$\frac{4mrn^2}{q^2} > n^2$$

so ist $4mrn^2 > q^2n^2$

$$4mr > q^2$$

$$r > \frac{q^2}{4m}$$

Folglich, so bald m und r negativ sind, und dabei r größer ist, als $\frac{q^2}{4m}$, so drücket die Gleichung kein mögliches Ding aus, und kann folglich nicht konstruiret werden. Dieses ist der Fall, welcher schon oben (§ 7.) erwähnet worden.

§. 13.

Nachdem die Fälle unterschieden worden, wo die gegebene Gleichung durch die Ellipse oder durch die Hyperbel konstruiret werden kann, so muß nun gezeiget werden, wie solche Ellipse oder Hyperbel in der That bestimmet wird. Wir fangen mit der Ellipse an, das heißt, mit dem Falle, wo m negativ ist.

Um die zweiten Sätze wegzuschaffen, hatten wir angenommen $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$

und hernach $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$

Die zweite dieser Gleichungen bekömmt folgende Gestalt, wenn m negativ ist,

$$u - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$$

Weil aber n eine willkührliche Größe ist, so kann man dieselbe entweder positiv oder negativ annehmen. Nimt man sie negativ, so ist $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$

Diese beiden Gleichungen müssen wir vor allen Dingen konstruiren, um die Lage der konjugirten Diameter zu bekommen.

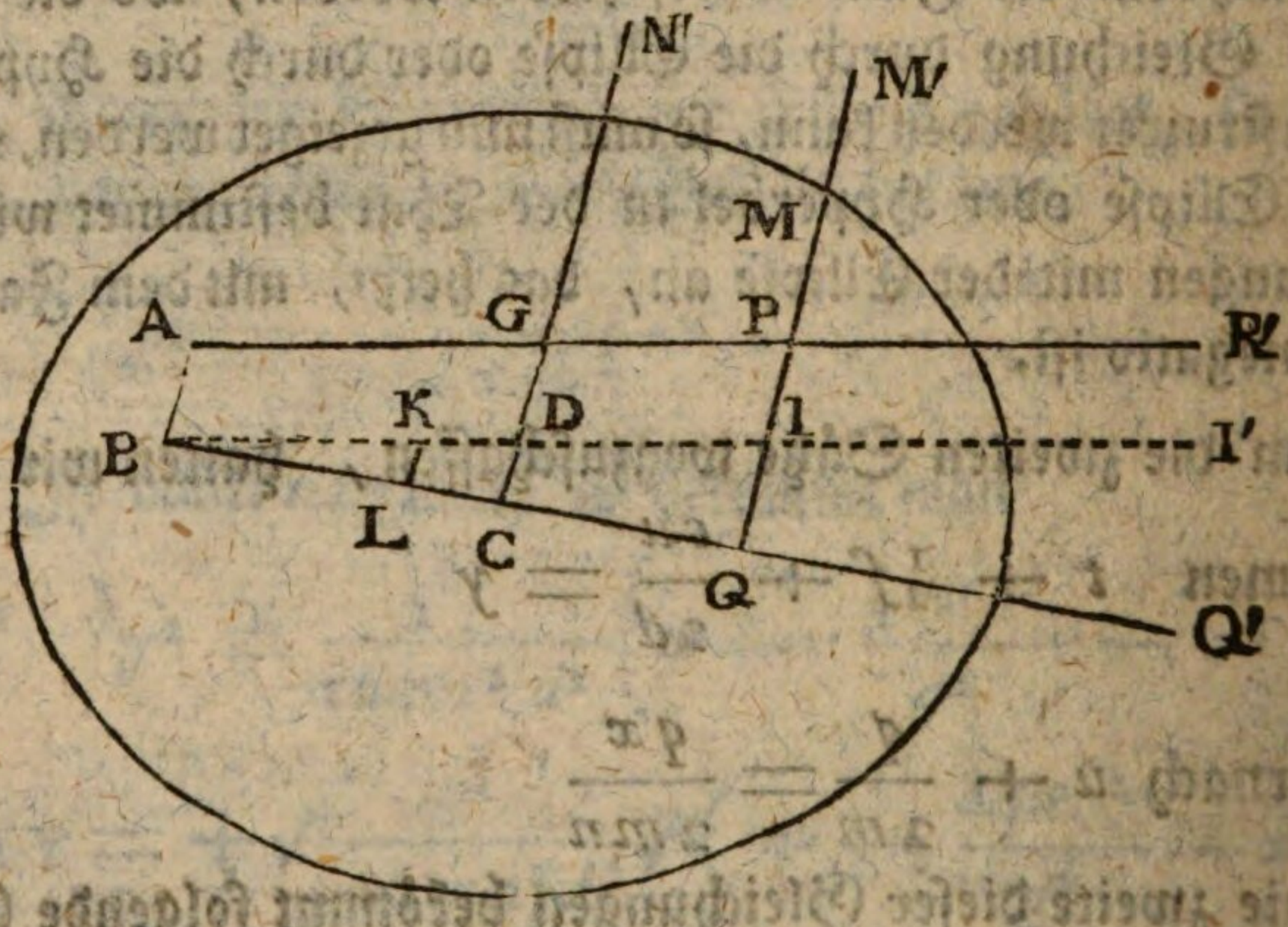
Die erste, nemlich $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$ giebt zu erkennen, daß, wenn man die Größe t der gegebenen Gleichung

$$dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$$

um $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$ vergrößert, man alsdann die Applikate y der Ellipse bekomme, wodurch die veränderte Gleichung

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

konstruiret werden soll. Es sey demnach AR′ die gerade



Linie, auf welcher jeder Werth von u, von A aus, genommen werden soll. Es sey AP $= u$. Es sey APM′ ein beliebiger Winkel, unter welchem die Linien u und t allemal

mal einander begegnen sollen. Mache AB $= \frac{1}{2}f$, und mit PM' parallel. Durch B ziehe BI' mit AR' parallel. Nimm willkührlich BK, und ziehe KL mit AB oder PM' parallel. Bestimme KL so, daß

$$d, \frac{1}{2}c :: BK\ KL$$

Durch B und L ziehe BLQ' von unbestimmter Länge, verlängere PM' bis sie der BQ' in Q begegnet.

Es sey nun der zu AP oder u gehörige Werth von x oder PM' so groß er will, so wird, wenn PM' die t vorstellet, nothwendig QM' die y vorstellen. Denn es ist QM' $=$ PM' $+$ PQ $=$ PM $+$ PI $+$ IQ $=$ PM $+$ AB $+$ IQ $= t + \frac{1}{2}f +$ IQ. Nun ist

$$BK, KL :: BI, IQ$$

oder

$$BK, KL :: AP, IQ$$

$$d, \frac{1}{2}c :: u, IQ$$

daher $IQ = \frac{cu}{2d}$

Also ist $QM' = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$.

Da also die Applikate in der Gleichung

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2} - x^2\right)$$

sich allemal in der Linie BQ' endiget, oder von derselben an gerechnet wird, so folget, daß auch die Abzisse x auf der nemlichen BQ' genommen werden muß; und da die Gleichung so eingerichtet ist, daß die Abzissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden, so muß der Punkt, wo die Abzisse x allemal ihren Anfang nimmt, der Mittelpunkt der Ellipse seyn. Folglich ist BQ' die Lage des Haupt-Diameters auf welchem die Applikaten unter dem Winkel

BQM' stehen, und in diesem Diameter ist irgendwo der Mittelpunkt. Laßt uns nun versuchen demselben zu bestimmen.

Die zweite Gleichung war $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$. Auf AR' worauf u genommen worden, nimm $AG = \frac{q}{2m}$ so ist $GP = AP - AG = u - \frac{q}{2m}$, folglich ist $GP = \frac{qx}{2mn}$. Durch den Punkt G ziehe N'GC mit den Applikaten QM' parallel, so muß der Punkt C in der Linie BQ' derjenige seyn, von wo aus die Abzissen x gezählet werden. Denn gesetzt, die QM' nähere sich der CN' bis daß sie auf dieselbe falle, so wird alsdann $GP = o$, oder $\frac{qx}{2mn} = o$.

Es kann aber $\frac{q}{2mn}$. x nicht anders o werden, als wenn x selbst o wird. Folglich ist der Punkt C derjenige wo $x = o$ wird. Er ist folglich der Mittelpunkt der Ellipse, weil angenommen worden, daß die Abzissen aus dem Mittelpunkte entspringen sollen. Folglich wenn QM' oder ein Theil derselben y ist, so ist $CQ = x$.

Hieraus wird nun ferner der Werth von n bestimmet.

Denn es ist $GP = \frac{qx}{2mn}$. Nun ist $x = CQ$ und $\frac{q}{2m} = AG$, folglich ist $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$, und also

$$n = \frac{AG \times CQ}{GP}$$

Da aber die Linien AP, BQ von drei parallelen Linien AB, GC, PQ, geschnitten werden, so sind die abgeschnittenen

Theile

Theile proporzionirt, wie in der gemeinen Geometrie gelehret wird, folglich ist

$$GP, AG :: CQ, BC$$

$$\text{daher } BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$$

$$\text{folglich ist } n = BC.$$

das heißt, wenn die gegebene Gleichung zu einer Ellipse gehören soll, worinn BQ' und CN' die Lage der Diameter verstellen, so muß für n der Werth der BC gesetzet werden, welche BC durch die angegebenen Konstrukzionen bestimmet wird.

Jezt bleibet uns also weiter nichts zu thun, als daß wir die Größe beider Diameter bestimmen. Man halte die Gleichung

$$y^2 = \frac{q^2}{16mn^2\ d^2}\left(nn + \frac{4mn^2\ r}{q^2} - x^2\right)$$

gegen die allgemeine Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)$$

so wird

$$\tfrac{1}{4}a^2 = n^2 + \frac{4mn^2r}{q^2}$$

$$a^2 = 4n^2 + \frac{16mn^2r}{q^2}$$

$$\text{und } a = \sqrt{\left(4n^2 + \frac{16mn^2\ r}{q^2}\right)}$$

Ferner ist $\frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2}{16mn^2d^2}$

$$b^2 : \left(4n^2 + \frac{16mn^2r}{q^2}\right) = \frac{q^2}{16mn^2d^2}$$

$$b^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2} \times \left(4n^2 + \frac{16mn^2r}{q^2}\right)$$

$$b^2 = \frac{q^2}{4md^2} + \frac{r}{d^2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4md^2} + \frac{r}{d^2}\right)}$$

Da nun die Grössen n, m, q, r, d alle bekannt sind, so sind auch beide Diameter bekannt, nemlich

$$\text{der Haupt-Diameter} = \sqrt{\left(4n^2 + \frac{16mn^2r}{q^2}\right)}$$

$$\text{der konjugirte Diameter} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{4md^2} + \frac{r}{d^2}\right)}$$

Da nun auch die Lage beider Diameter vermittelst der Linien BQ′ und CN′ bestimmet ist, so kann vermittelst derselben, wie an gehörigen Orte (III. H. §. 13.) gelehret worden, die Ellipse gezeichnet werden, welche dann die noch unbestimmten Linien PM′ in M schneiden und daher ihre Länge PM bestimmen wird. Auf diese Art hat man demnach CQ $= x$, QM $= y$, hingegen AP $= u$, und PM $= t$.

§. 14.

Träfe es sich, daß beide Diameter gleich wären, und daß der Winkel BCN′ den sie bilden, vermöge der Konstrukzion ein Rechter würde, so wäre alsdann die krumme Linie ein Zirkel. Will man bestimmen, in welchem Falle sol-

solches eintreffen kann, so ist es sichtbar, daß beide Axen gleich werden, wann

$$\frac{q^2}{16\,m\,d^2\,n^2} = 1$$

oder $q^2 = 16\,m\,d^2\,n^2$

oder $n^2 = \frac{q^2}{16\,m\,d^2}$

Was den Winkel betrift, so wird er ein rechter, wenn BCD ein rechtwinkliches Dreieck ist. Dieses aber erfordert, daß

$$(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2$$

oder $(BC)^2 + (CD)^2 = (AG)^2$

Nun ist $(BC)^2 = n^2 = \frac{q^2}{16\,m\,d^2}$ ferner geben die ähnlichen Dreiecke BCD, BLK

BK, KL :: BD, CD

oder BK, KL :: AG, CD

das ist d, $\frac{1}{2}c$ :: $\frac{q}{2\,m}$, CD

daher $CD = \frac{q\,c}{4\,m\,d}$

Wenn demnach der Winkel BCN′ ein rechter werden soll, so muß seyn

$$\frac{q^2}{16\,m\,d^2} + \frac{q^2\,c^2}{16\,m^2\,d^2} = \frac{q^2}{4\,m^2}$$

$$\frac{m\,q^2}{16\,m^2\,d^2} + \frac{q^2\,c^2}{16\,m^2\,d^2} = \frac{4\,q^2\,d^2}{16\,m^2\,d^2}$$

$$m\,q^2 + q^2\,c^2 = 4\,q^2\,d^2$$

$$m + c^2 = 4\,d^2,$$

weil aber m in der Ellipse negativ ist, so wird

$$-m + c^2 = 4d^2$$

$$m^2 - 4d^2 = m$$

Es ist aber $c^2 - 4de = m$

also $c^2 - 4d^2 = c^2 - 4de$

daher $-4d^2 = -4de$

$$d = e$$

§. 15.

Wenn man also wissen will, ob die krumme Linie eine Ellipse, ein Zirkel oder eine Hyperbel ist, so kommt es bei der Gleichung

$$dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = o$$

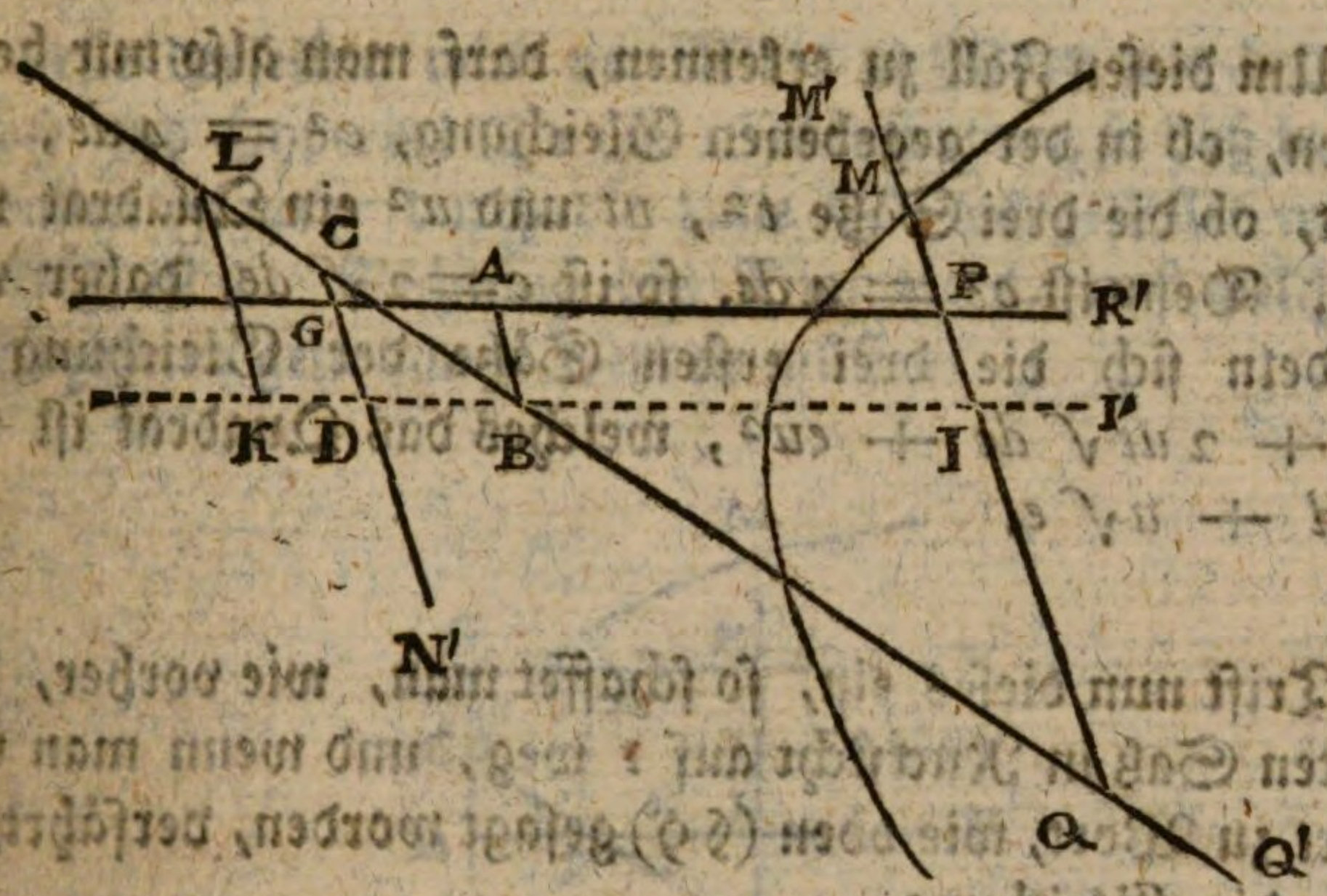
gar nicht auf die drei lezten Sätze an, nemlich auf fdt geu, hd^2, sondern nur auf die drei ersten, welche zwei Dimensionen der unbekannten Größen enthalten.

Sind die Koeffizienten d, c und e so beschaffen, daß $c^2 - 4de$ positiv wird, so ist die Linie eine Hyperbel. Ist $c^2 - 4de$ negativ, so ist die Linie eine Ellipse. Ist noch dabei $d = e$, und wird der Winkel BCN' vermöge der Konstrukzion ein rechter, so ist die krumme Linie ein Zirkel.

§. 16.

Alles, was wir von der Ellipse gesaget haben, ausgenommen den Fall, wo sie ein Zirkel wird, läßt sich ebenfalls auf die Hyperbel anwenden, das ist, auf die Gleichung $y^2 = \frac{q^2}{16mn^2d^2}\left(x^2 - n^2 + \frac{4mrn^2}{q^2}\right)$ welche von der anderen, die wir konstruiret haben, nur in den Zeichen verschieden ist. Man lese demnach alles

vorige wieder durch, und wende es auf die folgende Figur an, so ist weiter keine Veränderung zu machen, als daß AG in einer der AP entgegen gesezten Richtung genommen werden muß, welches durch die Gleichung $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ angezeiget wird. (§. 13). Alles Uebrige ist einerlei, wenn man nur das Wort Ellipse in Hyperbel verwandelt.



Ueberhaupt können in den verschiedenen einzelnen Fällen, sowohl bei der Ellipse, als bei der Hyperbel, die Linien AG, AB, BK, KL, in einer ganz anderen Lage erscheinen, als in beiden vorigen Figuren; diese Veränderungen aber werden jedesmal durch die Zeichen der Größen d, c, f, m, q, in den Gleichungen $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, und $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, bestimmet, wodurch die zweiten Sätze weggeschaffet werden.

§. 17.

Es bleiben uns noch zwei Fälle zu untersuchen, nemlich, wo $c^2 - 4de = o$, und wo zugleich $d = o$ und $e = o$.

Im ersten Falle, wo nemlich $c^2 - 4de = o$ oder $c^2 = 4de$, ist die krumme Linie eine Parabel. Weil die Größe m in diesem Falle o wird, so ist die vorige Konstrukzion unnöthig. Denn, wenn man den zweiten Satz in Betrachtung der t wegschaffet, so findet sich u^2 nicht mehr in der Gleichung.

Um diesen Fall zu erkennen, darf man also nur beobachten, ob in der gegebenen Gleichung, $c^2 = 4de$, das heißt, ob die drei Sätze t^2, ut und u^2 ein Quadrat machen. Denn ist $c^2 = 4de$, so ist $c = 2\sqrt{de}$, daher verwandeln sich die drei ersten Sätze der Gleichung in $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$, welches das Quadrat ist von $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Trift nun dieses ein, so schaffet man, wie vorher, den zweiten Satz in Rücksicht auf t weg, und wenn man von Wort zu Wort, wie oben (§ 9) gesagt worden, verfährt, so wird die Gleichung

$$4d^2y^2 = r + qu.$$

Diese Gleichung muß nun auf die allgemeine Gleichung $y^2 = px$ zurückgeführet werden, welche eine Parabel für jeden ihrer Diameter andeutet. Dividiret man durch $4d^2$, so kömt

$$y^2 = \frac{r+qu}{4d^2}$$

Nun sey $\frac{r+qu}{4d^2} = nx$

so ist $y^2 = nx$

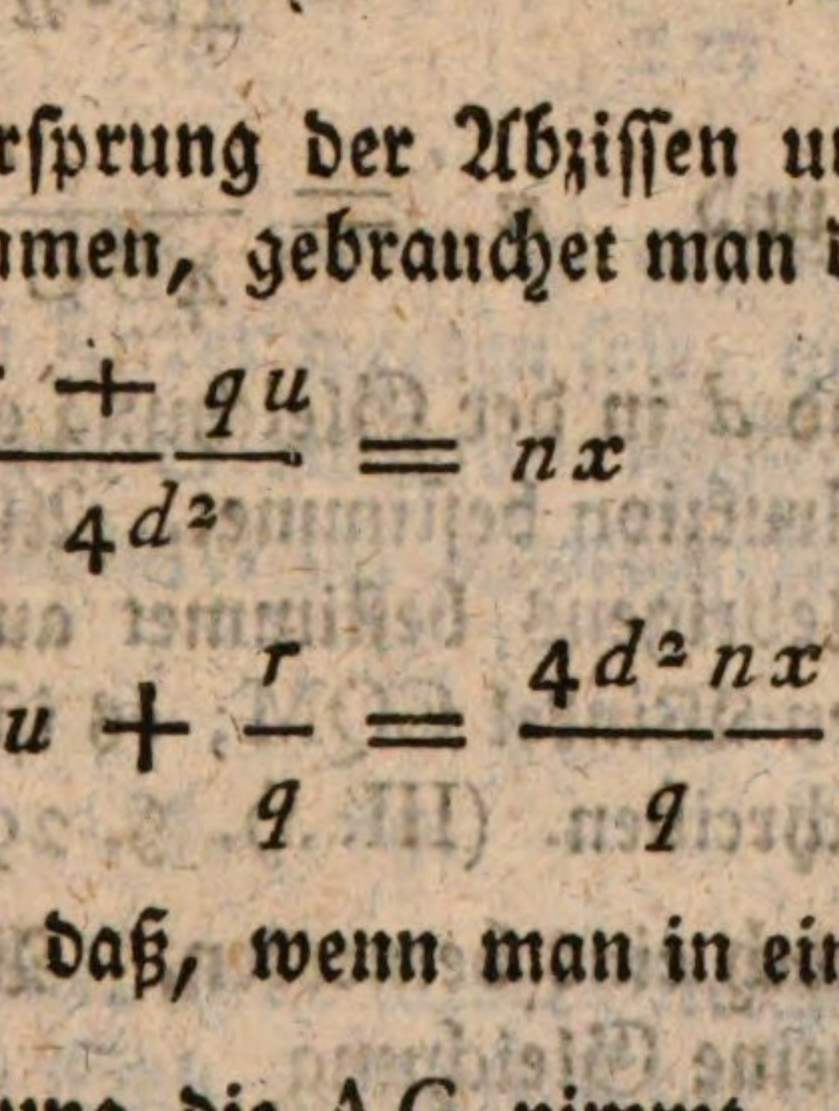
wo der Buchstabe n einen willkührlichen Faktor bedeutet, der aber bald bestimmet werden soll. Wir haben also zwei Gleichungen zu konstruiren, welche nöthig gewesen

sind, um die gegebene Gleichung auf die Parabel zurückzuführen, nemlich

$$t + \tfrac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$$

und $$\frac{r + qu}{4d^2} = nx$$

Die erste derselben wird von Wort zu Wort wie bei der Ellipse und Hyperbel (§ 13 u. 16) konstruiret, so daß in der folgenden Figur y durch die Linie QM vorgestellet wird, und BQ′ ist die Richtung des Diameters, auf welchem die Abzissen x genommen werden müssen.



Um nun den Ursprung der Abzissen und folglich des Diameters zu bestimmen, gebrauchet man die Gleichung

$$\frac{r + qu}{4d^2} = nx$$

diese giebt $$u + \frac{r}{q} = \frac{4d^2nx}{q}$$

Hieraus siehet man, daß, wenn man in einer der AP entgegengesetzten Richtung die AG nimmt, und sie $= \frac{r}{q}$ machet,

machet, alsdann $GP = \frac{4d^2nx}{q}$ werde, weil $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4d^2nx}{q}$. Wenn man also durch den Punkt G die GCD mit PM parallel ziehet, so daß sie der Q'B in C begegne, so ist der Punkt C der Ursprung der Abzissen x. Denn aus der Gleichung $GP = \frac{4d^2nx}{q}$, siehet man, daß wenn $GP = 0$, x auch $= 0$ seyn müsse, und da übrigens die Applikaten y sich in der BQ' endigen, so müssen die Abzissen x auf der BQ' genommen werden.

Zulezt müssen wir noch den Parameter n bestimmen. Wir haben eben jezt gesehen, daß $GP = \frac{4d^2nx}{q}$. Nun geben die parallelen Linien CD und QI,

$$BC, BD :: CQ, DI$$

oder $$BC, AG :: CQ, GP$$

das heißt $$BC, \frac{r}{q} :: x, \frac{4d^2nx}{q}$$

daher $$BC = \frac{r}{4d^2n}$$

und $$n = \frac{r}{4BC \times d^2}$$

Nun sind r und d in der Gleichung gegeben, und BC ist durch die Konstrukzion bestimmet. Also ist der Parameter n bekannt. Uebrigens bestimmet auch die Konstrukzion den Koordinaten-Winkel CQM; es ist demnach leicht, die Parabel zu beschreiben. (III. H. §. 29)

Laßt uns noch eins bemerken. Wir haben gefunden, daß die allgemeine Gleichung

$$dt^2 + cut + eu^2 + \&c. = 0$$

zur

zur Parabel gehöret, wann $c^2 = 4de$. Wird $c = 0$, so ist $4de = 0$, folglich entweder $d = 0$ oder $e = 0$. Wenn also das Produkt ut fehlet, so muß zugleich eines der Quadrate t^2 oder u^2 fehlen, um daß die Gleichung zur Parabel gehöre.

§. 18.

Wenn also ut fehlet, aber dabei die Quadrate t^2 und u^2 vorhanden sind, so gehöret die Gleichung nicht zur Parabel. In diesem Falle wird die im §. 13 gegebene Konstrukzion, worauf sich die Figuren (Seite 146 u. 153) beziehen, etwas einfacher. Denn da $c = 0$, so wird die Linie $KL = 0$, und BL fällt auf BK, welche ein Diameter des Kegelschnittes wird. Also sind die Abzissen x mit den Abzissen u, und die Applikaten y mit den Applikaten t parallel. Im nemlichen Falle verschwindet der zweite Satz der Gleichung in Betreff der u, ohne daß man die willkührliche Größe n gebrauchet. Denn BC, welche gleich n ist, wird hier $=$ BD oder AG, folglich ist alsdann

$n = \frac{q}{2m}$; dieses verwandelt die Gleichung $u + \frac{q}{2m}$

$= \frac{qx}{2mn} = \frac{qx}{2m} \times \frac{1}{n}$, in $u + \frac{q}{2m} = x$.

Hieraus folget, daß, wenn im gegenwärtigen Falle die krumme Linie ein Zirkel werden soll, nicht nur die angeführten Bedingungen Statt finden müssen, sondern daß noch ausserdem der Winkel der Koordinaten u und t ein rechter seyn muß.

§. 19.

Gesetzt das Produkt ut ist in der Gleichung, und nachdem man den zweiten Satz, in Betreff der einen unbekannten Größe, zum Exempel der t, weggeschaffet hat, bleibe

keine

keine andere Potenz der u, als das Quadrat, so ist kein zweiter Satz mehr wegzuschaffen. Demohnerachtet muß doch noch eine Veränderung geschehen, und $u = \frac{lx}{n}$ gesetzet werden, wo $\frac{l}{n}$ ein willkührlicher Bruch ist, der aber in der Konstrukzion auf eine ähnliche Art, wie bei der Parabel (§. 17) bestimmet wird. Hiervon wird im folgenden Hauptstücke ein Exempel vorkommen.

§. 20.

Wenn von den drei Sätzen t^2, ut und u^2 nur eines von beiden Quadraten fehlet, so gehöret die Gleichung allemal zur Hyperbel, oder sie drücket keine krumme Linie aus. Denn wenn d oder e zu null wird, so bleibet von der Größe $c^2 - 4de$ nur c^2 übrig, welches allemal eine positive Größe ist.

§. 21.

Endlich, wenn beide Quadrate t^2 und u^2 fehlen, so bekömmt die Gleichung eine solche Gestalt

$$gut + ht - ku - l = o$$

wo g, h, k, l entweder positiv oder negativ seyn können. In diesem Falle kann wiederum die allgemeine Konstrukzion (§. 13.) nicht gebrauchet werden, sondern die Gleichung wird vermittelst der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten konstruiret. Weil aber die Abzissen nicht aus dem Mittelpunkte gerechnet werden, so muß erst die Gleichung folgendermaßen vorbereitet werden.

Man dividire alles durch g, so wird

$$ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = o$$

oder

$$\left(t - \frac{k}{g}\right)u + \frac{ht}{g} - \frac{l}{g} = o$$

Man

Man mache $t - \frac{k}{g}$, das ist, die Größen, womit u multipliziret ist, einer unbestimmten Größe y gleich, nemlich

$$t - \frac{k}{g} = y$$

so ist $t = y + \frac{k}{g}$

Substituiret man diesen Werth von t, so ist

$$uy + \frac{h}{g}\left(y + \frac{k}{g}\right) - \frac{l}{g} = o$$

oder $$uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = o$$

oder $$\left(u + \frac{h}{g}\right)y + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = o$$

Nun sey wiederum $u + \frac{h}{g}$, womit y multiplizirt ist, gleich einer neuen unbekannten Größe x, oder

$$u + \frac{h}{g} = x$$

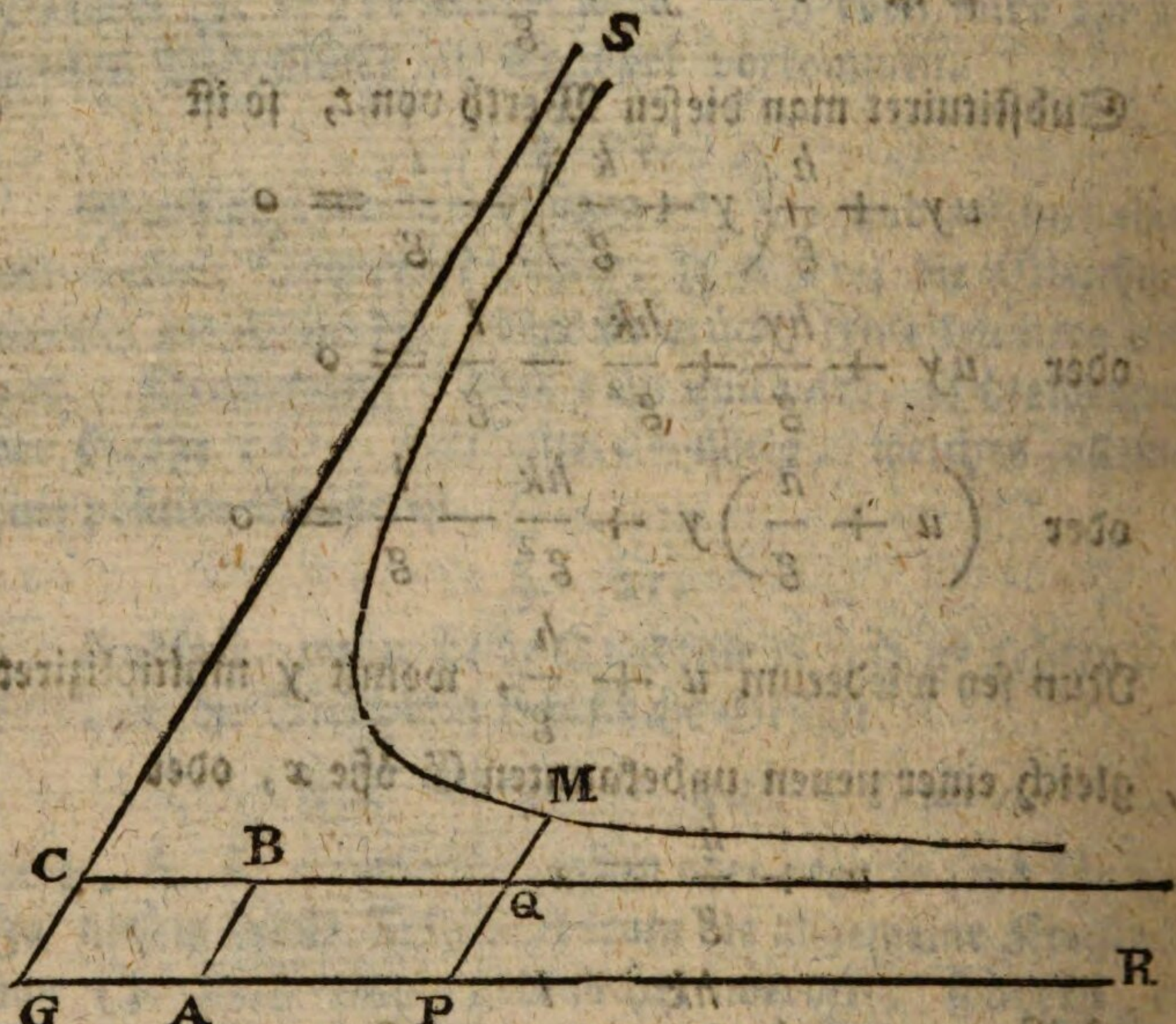
so ist $$xy + \frac{hk}{g^2} - \frac{l}{g} = o$$

oder $$xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$$

Diese Gleichung gehöret nun zur Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, jedes x wird auf der einen Asymptote aus dem Mittelpunkte gerechnet, und y wird mit der anderen Asymptote parallel gezogen. Die Potenz der Hyperbel ist $\frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$

Um

Um nun diese Hyperbel zu konstruiren, so müssen erst: lich beide Gleichungen $t - \frac{k}{g} = y$ und $u + \frac{h}{g} = x$ kon: struirt werden. Die erste giebt zu erkennen, daß jedes t um $\frac{k}{g}$ vermindert werden muß, wenn man y bekommen will.



Durch den Punkt A, welcher der Ursprung der Größen u und t seyn soll, ziehe man eine Linie AB parallel mit PM oder t, und gleich $\frac{k}{g}$. Durch B ziehe die Linie CBQ mit AP parallel, so ist QM $= y$, weil QM $=$ PM $-$ PQ $=$ PM $-$ AB $= t - \frac{k}{g} = y$

Um x zu bekommen, muß, vermöge der Gleichung $u + \frac{h}{g} = x$, zu u oder AP die Größe $\frac{h}{g}$ hinzu gethan werden.

Man

Man mache demnach $AG = \frac{h}{g}$, und ziehe GS parallel mit PM, so wird dieselbe die BQ irgendwo in C schneiden, und CQ wird x seyn, weil $CQ = BQ + BC = AP + AG = u + \frac{h}{g} = x$.

Der Punkt C wird der Mittelpunkt der Hyperbel seyn, wozu die Asymptoten CQ und CS gehören. Vermöge der Asymptoten und der Gleichung $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{g^2}$ kann die Hyperbel beschrieben werden. Denn zu jedem willkührlich bestimmten Werth von x, läßt sich das dazu gehörige y finden. Oder, sobald nur eine Applikate oder ein Punkt der Hyperbel bestimmet ist, so lassen sich so viel andere Punkte bestimmen als man will. (III. Hauptst. § 27.)

§. 22.

Sollten in der Gleichung alle drei Säze t^2, ut und u^2 fehlen, so drücket sie weiter nichts aus, als eine gerade Linie. Deren Konstrukzion aber kann leicht aus denjenigen abgenommen werden, was über die Konstrukzion der Hülfs-Gleichungen gesaget worden, wodurch die Hauptgleichung verändert worden. Auch kann man im Anfange dieses Hauptstückes (§. 7.) sehen, wie wir Gleichungen vom ersten Grade konstruiret haben.

§. 23.

Aus allem, was in diesem Hauptstücke gesaget worden, erhellet, daß jede Gleichung des zweiten Grades mit zwei unbekannten oder unbestimmten Größen, sich durch Kegelschnitte konstruiren läßt, ausgenommen, wenn sie an sich selbst ein unmögliches Verhältniß ausdrücket, und wann sie ein System von zwei geraden Linien (§. 7.) vorstellet.

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse in dem Falle, wo eine negative Größe entstehet, wenn vom Quadrate des Koefizienten des Produkts ut, das vierfache Produkt der Koefizienten der Quadrate t^2 und u^2 abgezogen wird.

Diese Ellipse kann ein Zirkel werden, wenn nebst der vorigen Bedingung noch diese eintrift, daß die Koeffizienten von t^2 und u^2 gleich sind.

Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel, wenn nach der gemeldeten Subtrakzion eine positive Größe übrig bleibet.

Der Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn nach der angeführten Subtrakzion nichts übrig bleibet.

Und, um in jedem Falle den Kegelschnitt zu konstruiren, müssen in die gegebene Gleichung anstatt t und u zwei andere unbekannte Größen, x und y, eingeführet werden, so daß die zweiten Sätze sowohl in Betreff des t als des u verschwinden, und, daß die Gleichung eine Form bekomme, die mit einer derjenigen ähnlich sey, welche die Natur der Kegelschnitte ausdrücken.

Fünftes Hauptstück.

Auflösung einiger geometrischer Aufgaben vermittelst der Kegelschnitte.

§. 1.

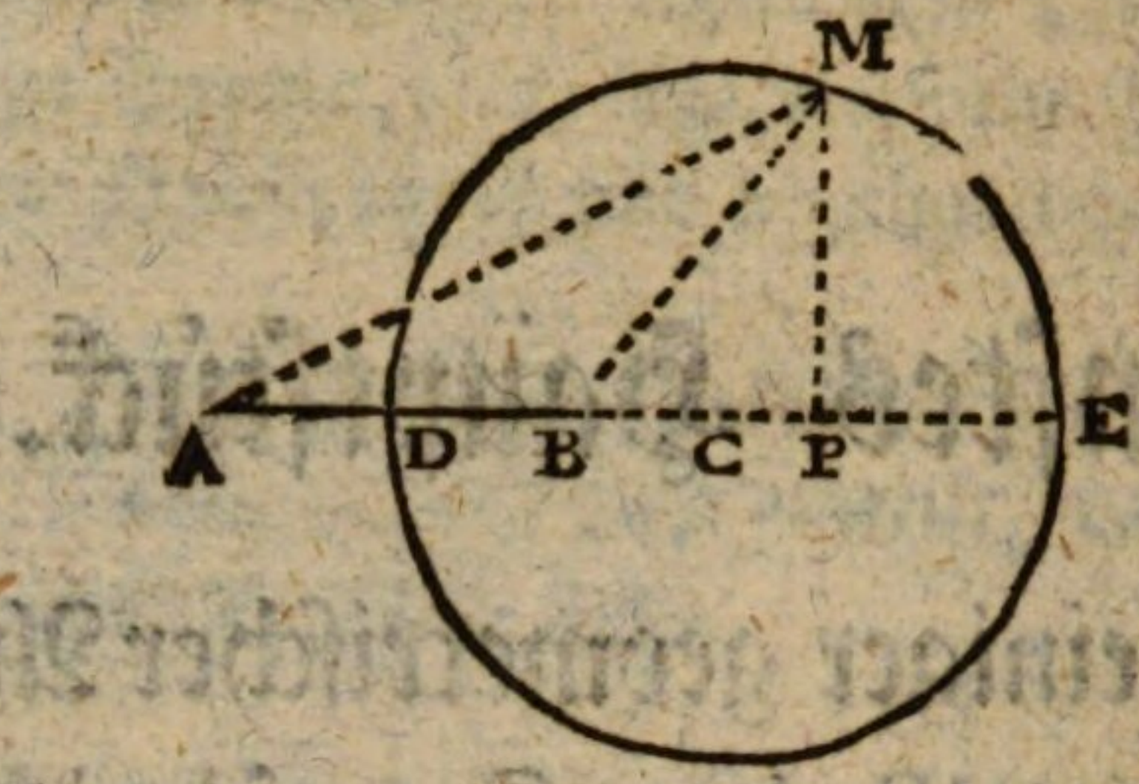
Wir haben im vorigen Hauptstücke gesehen, daß jede Gleichung des zweyten Grades von zwei unbestimmten Größen sich durch einen Kegelschnitt konstruiren läßt. Hieraus folget nun, daß jede geometrische Aufgabe die auf eine solche Gleichung führet, durch einen Kegelschnitt aufgelöset werden kann, welches folgende Beyspiele noch deutlicher machen werden.

§. 2.

Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Punkte A und B, oder die Enden der geraden Linie AB. Es soll ein dritter Punkt M gefunden werden, so daß dessen Entfernungen MA, MB von den Punkten A und B in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Z. E. daß MA, MB :: *g*, *h*.

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey M der verlangte Punkt. Fälle MP senkrecht auf AB oder auf deren Verlängerung. Es werde die unbekannte Entfernung AP des Perpendikels vom Punkte A genannt u, die ebenfalls unbekannte Länge MP des Perpendikels sey t, und es sey die bekannte $AB = c$.

Nun ist, wegen der rechtwinklichen Dreiecke,

$$AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)}$$

oder $$AM = \sqrt{(u^2 + t^2)}$$

$$BM = \sqrt{(BP^2 + PM^2)}$$

$$BM = \sqrt{[(u - c)^2 + t^2]}$$

$$BM = \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)}$$

Da nun seyn soll

$$AM, BM :: g, h$$

so ist $\sqrt{(u^2 + t^2)}, \sqrt{(u^2 - 2cu + c^2 + t^2)} :: g, h$

Quadriret man alles, so ist

$$(u^2 + t^2), (u^2 - 2cu + c^2 + t^2) :: g^2, h^2$$

folglich, wenn man die äussersten und mittlern Sätze multipliziret,

$$h^2 u^2 + h^2 t^2 = g^2 u^2 - 2cg^2 u + c^2 g^2 + g^2 t^2$$

oder $$o = g^2 u^2 - h^2 u^2 + g^2 t^2 - h^2 t^2 - 2g^2 cu + g^2 c^2$$

$$o = (g^2 - h^2) u^2 + (g^2 - h^2) t^2 - 2g^2 cu + g^2 c^2$$

Dieses ist eine unbestimmte Gleichung des zweiten Grades zwischen u und t, woraus man schon siehet, daß nicht nur ein einziger solcher Punkt M möglich ist, sondern unendlich viele. Ferner siehet man, daß die Gleichung durch den Zirkel konstruiret werden muß, weil die Quadrate u^2 und t^2 den nemlichen Koeffizienten mit dem nemlichen Zeichen haben. (IV. Hauptst. §. 23.)

Da also die Gleichung zum Zirkel gehöret, so muß sie auf die Form $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$ (I. H. §. 34) zurück gebracht werden. Weil in Betrachtung des t kein zweiter Satz vorhanden ist, so ist keiner wegzuschaffen, und wir brauchen nur bloß y anstatt t zu schreiben, so haben wir

$$(g^2 - h^2)\,u^2 + (g^2 - h^2)\,y^2 - 2g^2cu + g^2c^2 = 0$$

oder

$$(g^2 - h^2)\,u^2 - 2g^2cu + (g^2 - h^2)\,y^2 + g^2c^2 = 0$$

Nun muß in Betrachtung des u der zweite Satz weggeschaffet werden. Da das Produkt ut oder uy nicht vorhanden ist, so ist es hinlänglich, die gemeine Regel zu gebrauchen. (IV. H. §. 9). Man dividire demnach die Gleichung durch den Koeffizienten von u^2, so kömmt

$$u^2 - \frac{2g^2c}{g^2 - g^2}u + y^2 + \frac{g^2e^2}{g^2 - h^2} = 0$$

oder $$u^2 - \frac{2g^2c}{g^2 - h^2}u = -\frac{g^2c^2}{g^2 - h^2} - y^2$$

Nun sey $$u - \frac{g^2c}{g^2 - h^2} = x$$

Man quadrire, so kömmt

$$u^2 - \frac{2g^2c}{g^2 - h^2}u + \frac{g^4c^2}{(g^2 - h^2)^2} = x^2$$

folglich $$u^2 - \frac{2g^2c}{g^2 - h^2}u = x^2 - \frac{g^4c^2}{(g^2 - h^2)^2}$$

Man substituire diesen Werth von $u^2 - \frac{2g^2c}{g^2 - h^2}u$ in die obige Gleichung, so ist

$$x^2 - \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} = -\frac{g^2c^2}{g^2-h^2} - y^2$$

$$\text{oder} \quad -x^2 + \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} = \frac{g^2c^2}{g^2-h^2} + y^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} - \frac{g^2c^2}{g^2-h^2} - x^2 = y^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{g^4c^2 - g^2c^2(g^2-h^2)}{(g^2-h^2)^2} - x^2 = y^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{g^4c^2 - g^4c^2 + g^2c^2h^2}{(g^2-h^2)^2} - x^2 = y^2$$

$$\text{oder} \quad \frac{g^2c^2h^2}{(g^2-h^2)^2} - x^2 = y^2$$

$$\text{oder} \quad y^2 = \frac{g^2c^2h^2}{(g^2-h^2)^2} - x^2$$

Die allgemeine Gleichung des Zirkels ist

$$y^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - x^2$$

folglich ist im gegenwärtigen Falle

$$\tfrac{1}{4}a^2 = \frac{g^2e^2h^2}{(g^2-h^2)^2}$$

$$\text{daher} \quad \tfrac{1}{2}a = \frac{gch}{g^2-h^2}$$

Dieses ist der Halbmesser des Zirkels. Es ist nun noch der Mittelpunkt C zu bestimmen, welcher auf ABP seyn muß, weil $t = y$. Die Gleichung

$$u - \frac{g^2c}{g^2-h^2} = x$$

wel-

welche man angenommen hatte, um den zweiten Satz wegzuschaffen, giebt zu erkennen, daß man x bekomme, wenn man u um die Größe $\frac{g^2 c}{g^2 - h^2}$ vermindert. Man nehme also $AC = \frac{g^2 c}{g^2 - h^2}$, so wird $CP = AP - AC$

$$= u - \frac{g^2 c}{g^2 - h^2} = x.$$

Also, aus dem Punkte C, mit dem Halbmesser $\frac{gch}{g^2 - h^2}$ beschreibe man einen Zirkel, so hat jeder Punkt M desselben die verlangte Eigenschaft.

Es können übrigens der Mittelpunkt und der Halbmesser auf eine ziemlich einfache Art, vermittelst der Gleichung $u^2 - \frac{2g^2 cu}{g^2 - h^2} = -\frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2} + y^2$ bestimmet werden. Denn, da der Mittelpunkt, wie bemerket worden, in der Linie AP liegen muß, so setze man in dieser Gleichung $y = o$, und löse dieselbe auf. Die Auflösung wird die beiden Abzissen AD, AE, oder die beiden Werthe von u geben, wo $y = o$ wird, oder wo der Zirkel die AP schneidet. Auf diese Art bekömmt man den Diameter DE des Zirkels, folglich auch den Halbmesser CE und den Mittelpunkt C.

Ist nun in der angeführten Gleichung $y = o$, so hat man $u^2 - \frac{2g^2 c}{g^2 - h^2} u = -\frac{g^2 c^2}{g^2 - h^2}$

Man verfahre nach der gewöhnlichen Methode zur Auflösung der quadratischen Gleichungen, und addire beiderseits das Quadrat von $\frac{g^2 c}{g^2 - h^2}$,

$$\text{so ist } u^2 - \frac{2g^2c}{g^2-h^2}u + \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} = \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} - \frac{g^2c^3}{g^2-h^2}$$

oder, wenn man das zweite Glied der Gleichung, wie vorher, verkürzet

$$u^2 - \frac{2g^2c}{g^2-h^2}u + \frac{g^4c^2}{(g^2-h^2)^2} = \frac{g^2h^2c^2}{(g^2-h^2)^2}$$

$$\text{daher } u - \frac{g^2c}{g^2-h^2} = \pm\frac{ghc}{g^2-h^2}$$

$$u = \frac{g^2c}{g^2-h^2} \pm \frac{ghc}{g^2-h^2}$$

$$u = \frac{g^2c \pm ghc}{g^2-h^2}$$

$$u = \frac{gc\,(g \pm h)}{(g-h)(g+h)}$$

Die beiden Werthe von u sind demnach

$$u = \frac{gc\,(g-h)}{(g-h)(g+h)}$$

und

$$u = \frac{gc\,(g+h)}{(g-h)(g+h)}$$

das heißt, es ist

$$u = \frac{gc}{g-h} = AD$$

und

$$u = \frac{gc}{g+h} = AE$$

Hieraus siehet man, daß die beiden Punkte D und E vermittelst einer bloßen geometrischen Proporzion gefunden werden können. Es ist nemlich

$$(g-h),\ g :: c,\ AD$$

$$(g+h),\ g :: c,\ AE$$

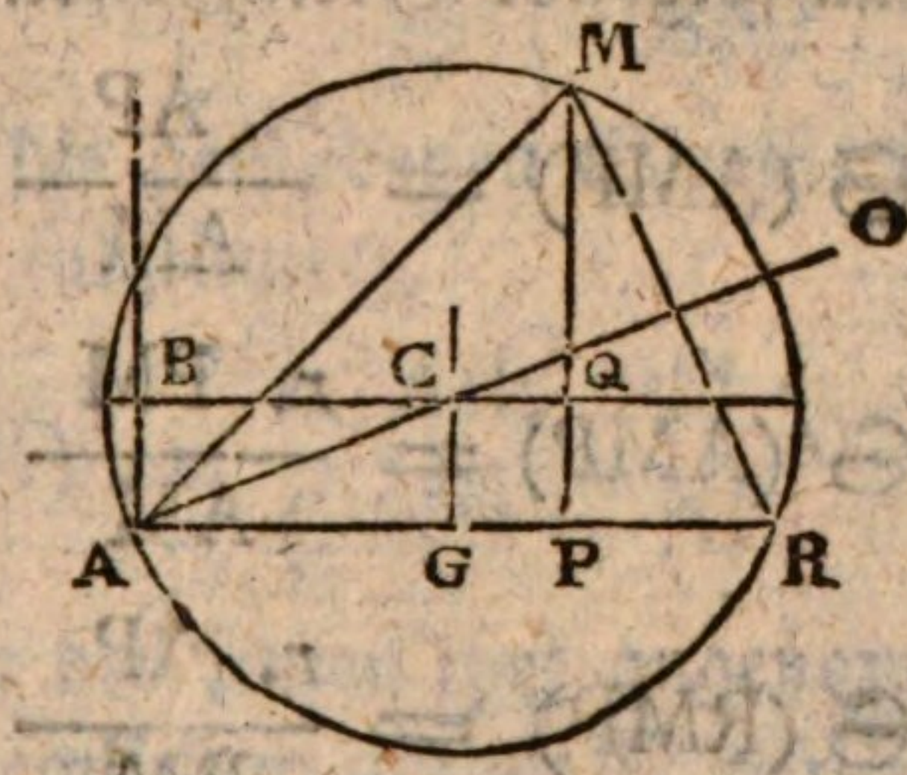
Anmerkung. Bei der vorigen Aufgabe siehet man, daß der Punkt M, der gesuchet wurde, jeder Punkt der Peripherie DMED seyn kann. Diese Peripherie ist demnach der Ort, in welchem der verlangte Punkt genommen werden muß.

Hieraus kann man abnehmen, was ein geometrischer Ort sey. Es ist nemlich eine Linie, sie mag übrigens gerade oder krumm seyn, worin alle möglichen Punkte liegen, die einer vorgelegten Frage Genüge leisten.

§. 3.

Aufgabe.

Es soll ausserhalb der Linie AR ein Punkt M gefunden werden, so daß bei M ein Winkel AMR entstehe, der einem gegebenen Winkel gleich sey, wenn man aus M nach den beiden Punkten A und R die geraden MA und MR ziehet.



Auflösung. Es sey r der Halbmesser des Zirkels in den trigonometrischen Tafeln, und m sey die in den Tafeln angegebene Tangente des Winkels dem der Winkel AMR gleich seyn soll. Fälle MP senkrecht auf AR. Es sey $AP = u$, $PM = t$, $AR = b$, so ist $PR = b - u$.

Wir nehmen aus der Trigonometrie die drei folgenden Sätze als bekannt an. Nemlich wenn A und B zwei Winkel sind, und wenn wir den Sinus durch S, den Kosinus durch S' und die Tangente durch T ausdrücken, so ist

$$\text{I.)}\ S(A+B) = \frac{SA.\,S'B + SB.\,S'A}{r}$$

$$\text{II.)}\ S'(A+B) = \frac{S'A.\,S'B - SA.\,SB}{r}$$

$$\text{III)}\ T(A+B) = \frac{r.\,S(A+B)}{S'(A+B)}$$

Dieses vorausgesetzt, so geben die rechtwinklichen Dreiecke APM, RPM, folgende trigonometrische Verhältnisse:

AM, AP :: r, S (AMP)

AM, PM :: r, S (MAP) oder S'(AMP)

RM, RP :: r, S (RMP)

RM, PM :: r, S (MRP) oder S'(RMP)

Hieraus ziehet man folgende Gleichheiten:

$$S(AMP) = \frac{r.\,AP}{AM}$$

$$S'(AMP) = \frac{r.\,PM}{AM}$$

$$S(RMP) = \frac{r.\,RP}{RM}$$

$$S'(RMP) = \frac{r.\,PM}{RM}$$

Da nun $\angle AMR = \angle AMP \pm \angle RMP$, so ist, vermöge der angeführten Formeln:

$$S(AMR) = \frac{S(AMP).S'(RMP) + S(RMP).S'(AMP)}{r}$$

Sub:

Substituiret man die gefundenen Werthe von S(AMP), u. s. f. so kömmt:

$$S(AMR) = \frac{r.\ AP.\ PM + r.\ RP.\ PM}{AM.\ RM}$$

oder $$S(AMR) = \frac{r.\ (AP + RP).\ PM}{AM.\ RM}$$

oder $$S(AMR) = \frac{r.\ AR.\ PM}{AM.\ RM.}$$

Ferner wird

$$S'(AMR) = \frac{S'(AMP).S'(RMP) - S(AMP).S(RMP)}{r.}$$

oder wenn man substituiret

$$S'(AMR) = \frac{r.\ (PM)^2 - r.\ AP.\ RP}{AM.\ RM}$$

Nun ist

$$T(AMR) = \frac{r.\ S(AMR)}{S'(AMR)}$$

oder wenn man die gefundenen Werthe von S (AMR) und S′ (AMR) substituiret,

$$T(AMR) = \frac{r.\ AR.\ PM}{(PM)^2 - AP.\ PR.}$$

Man setze anstatt der Linien ihre angenommenen algebraischen Werthe, nemlich m anstatt T (AMR), b anstatt AR, t anstatt PM, u anstatt AP, $b - u$ anstatt PR, so ist

$$m = \frac{r.\ b.\ t}{t^2 - u(b - u)}$$

$$m = \frac{r\,b\,t}{t^2 - bu + u^2}$$

oder

oder $mt^2 + mu^2 - mbu - rbt = o$

Diese Gleichung gehöret zum Zirkel (IV. H. §. 23.) wie man es wohl vermuthen konte.

Um nun den Mittelpunkt und den Halbmesser des Zirkels zu bestimmen, so muß erstlich die gefundene Gleichung nach der gewöhnlichen Form der Zirkelgleichung eingerichtet werden. Wenn man alles durch den Koeffizienten von t^2 dividiret, so ist

$$t^2 - \frac{rb}{m} \cdot t - bu + u^2 = o$$

Es sey $t - \frac{rb}{2m} = y$

so wird $t^2 - \frac{rb}{m} \cdot t + \frac{r^2 b^2}{4m^2} = y^2$

oder $t^2 - \frac{rb}{m} t = y^2 - \frac{r^2 b^2}{4m^2}$

folglich $y^2 - \frac{r^2 b^2}{4m^2} - bu + u^2 = o$

Nun muß der zweite Satz in Betrachtung des u weggeschaffet werden, das heißt, es muß die erste Potenz u aus der Gleichung vertrieben werden. Weil nun das Produkt ut nicht vorhanden ist, so mache man bloß $u - \frac{1}{2}b = x$, dann ist $u^2 - bu + \frac{1}{4}b^2 = x^2$ und $u^2 - bu = x^2 - \frac{1}{4}b^2$, folglich bekommen wir

$$y^2 - \frac{r^2 b^2}{4m^2} + x^2 - \frac{b^2}{4} = o$$

oder $y^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{r^2 b^2}{4m^2} - x^2$

Da

Da nun die allgemeine Gleichung des Zirkels $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2$ ist, so wird im gegenwärtigen Falle

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{r^2 b^2}{4m^2}$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{r^2 b^2}{4m^2}\right)}$$

dieses ist der Halbmesser des Zirkells.

Um nun die Lage dieses Halbmessers und zugleich den Mittelpunkt zu bestimmen, so betrachte ich die Gleichung $t - \frac{rb}{2m} = y$. Ich ziehe AB mit PM parallel, oder auf AR senkrecht, und mache $AB = \frac{rb}{2m}$. Ich ziehe BCQ mit AR parallel. So ist $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$.

Ich betrachte ferner die Gleichung $u - \frac{1}{2}b = x$. Ich mache $AG = \frac{1}{2}b$, so ist $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}b = x$. Durch G ziehe ich GC parallel mit PM, so schneidet GC die BQ in C, und C ist der Mittelpunkt des Zirkels.

Ziehe ich nun AC, so ist im rechtwinklichen Dreiecke AGC

$$AC = \sqrt{(AG^2 + CG^2)}$$

$$\text{oder } AC = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} + \frac{r^2 b^2}{4m^2}\right)}$$

folglich ist AC der Halbmesser. Also wird aus C durch A ein Zirkel gezogen, und jeder Punkt M in der Peripherie hat die verlangte Eigenschaft.

Diese Konstrukzion kann noch erleichtert werden. Um die Linie $AB = \frac{rb}{2m}$ zu bekommen, braucht man nur die

gerade

gerade AO zu ziehen, so daß ∠BAO dem gegebenen Winkel gleich sey. Diese AO wird die CG, welche auf der Mitte der AR senkrecht stehet, im Punkte C schneiden, welcher der Mittelpunkt des Zirkels seyn wird. Denn im rechtwinklichen Dreiecke BAC ist

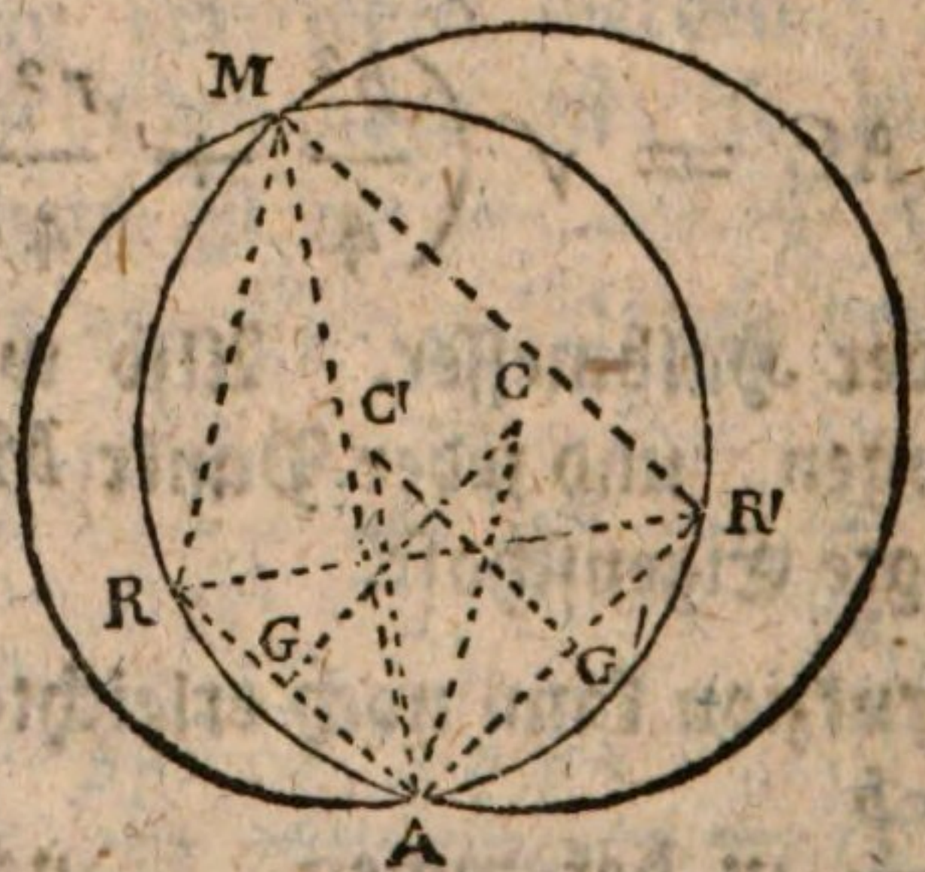
$$r, \mathfrak{T}(BAC) :: AB, BC \text{ oder } AG$$

das heißt, $r, \quad m \quad :: AB, \frac{1}{2}b,$

also ist $AB \text{ oder } CG = \frac{rb}{2m}$

Der Winkel RAO ist das Komplement des Winkels OAB oder CAB. Folglich mache man ∠RAO dem Komplemente des gegebenen Winkels gleich. In der Mitte G der AR errichte man eine senkrechte Linie GC. Wo sich nun die Linien AO und GC schneiden, da ist der Mittelpunkt C, und CA ist der Halbmesser.

Zusatz. Vermittelst der gefundenen Auflösung läßt sich eine andere Aufgabe sehr leicht beantworten. Es sind nemlich drei Punkte R, A, R′ gegeben, nebst den Winkeln RMA, R′MA, unter welchen die Linien RA und R′A aus einem gewissen Punkte M gesehen werden. Es soll die Lage dieses Punktes M bestimmet werden.



Ueber

Ueber der Mitte G, G′ jeder der gegebenen Linien RA, R′A, errichte die senkrechte GC, G′C′. Aus A ziehe man die geraden AC, AC′, so daß AC mit RA und AC′ mit R′A das Komplement des Winkels mache, unter welchem jede Linie insbesondere aus M gesehen worden. So werden die Mittelpunkte C und C′, nebst den Halbmessern CA, C′A, zweier Zirkel bestimmet, die sich irgendwo in M schneiden werden. Und also ist der Punkt M bestimmet, welches natürlicher Weise aus der Auflösung der vorigen Aufgabe fließet.

Die jetzige Aufgabe kann den Feldmessern zu Statten kommen, wenn sie auf einem Plane die Lage eines Punktes bestimmen wollen, woraus drei der Lage nach bekannten Gegenstände beobachtet worden.

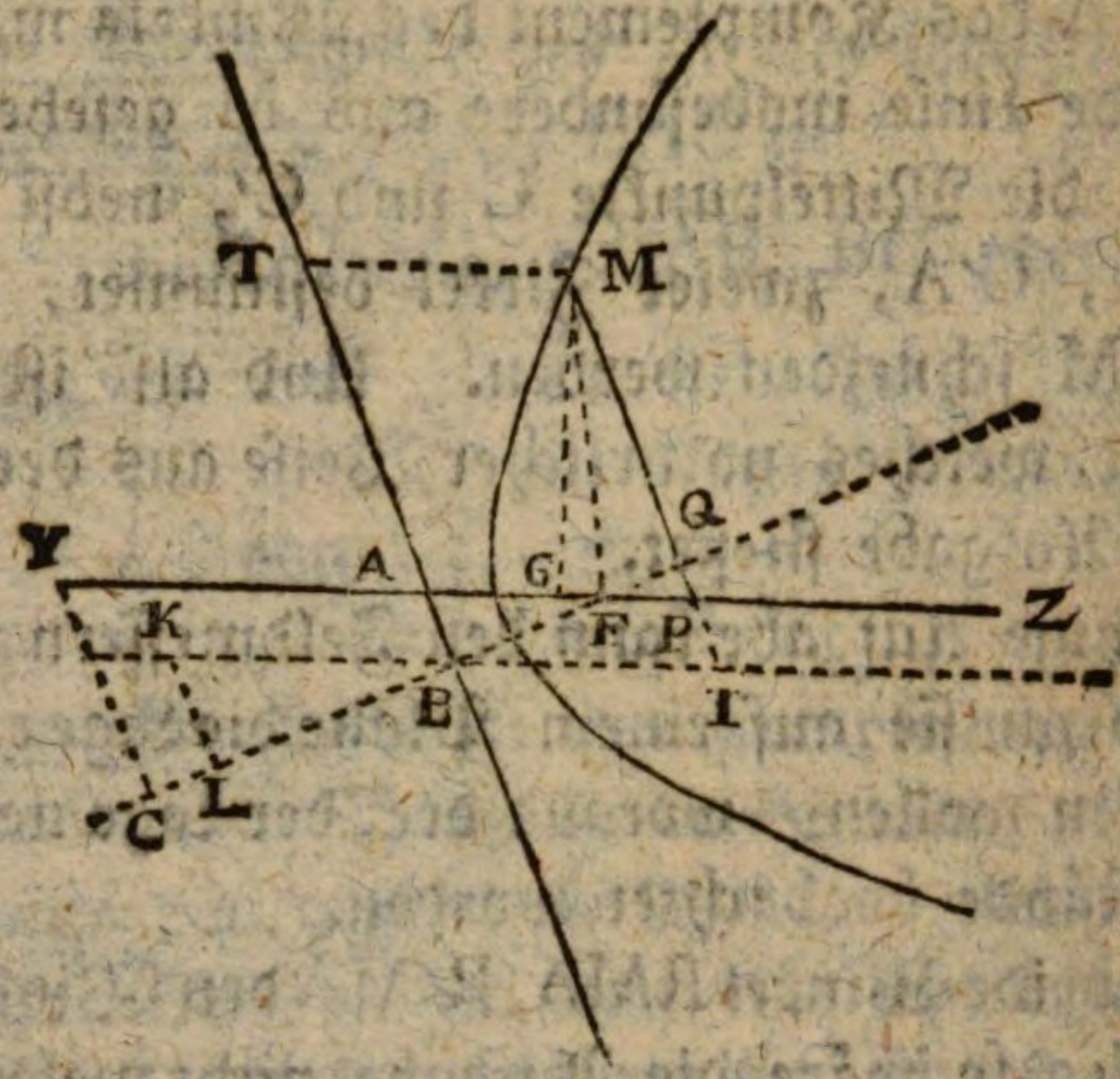
Wären beide Winkel RMA, R′MA den Winkeln RR′A, R′RA gleich, so wäre die Aufgabe nicht mehr bestimmt, beide Zirkel würden auf einander fallen, und jeder Punkt des Umkreises würde die Aufgabe beantworten. Denn in solchem Falle müssen die Punkte M und R′, wegen Gleichheit der Winket RMA und RR′A, vermöge der ersten Aufgabe dieses Paragraphs, in einem Zirkel-Umkreise liegen, weil ihre Schenkel sich beide in R und A endigen. Aus dem nemlichen Grunde müssen auch die Punkte M und R in einem Zirkelumkreise liegen. Also lägen die Punkte R, M, R′ in dem nemlichen Umkreise; und durch diese Punkte könnten nicht zwei verschiedene Peripherien gezogen werden.

§. 4.

Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien AZ und AT der Lage nach gegeben, so daß sie einen gewissen Winkel ZAT bilden. In der einen AZ ist auch ein Punkt F gegeben. Es soll ein anderer Punkt M gefunden werden, so daß dessen Entfernung von F in einem gewissen

wissen Verhältnisse stehe mit seiner Entfernung von der Linie AT, wenn diese leztere Entfernung vermittelst einer mit AZ parallelen Linie MT gemessen wird



Auflösung. Es sey M der verlangte Punkt, und es werde, außer MF und MT noch MG senkrecht auf AZ und MP mit AT parallel gezogen.

Da der Winkel MPG gegeben ist, so ist auch sein Sinus und sein Kosinus in den Tafeln gegeben. Wir wollen den Halbmesser der Tafeln mit r, den Sinus des gegebenen Winkels mit p, und dessen Kosinus mit q bezeichnen. Will man nicht die Tafeln gebrauchen, so darf man nur ein dem $\triangle$ MPG ähnliches rechtwinkliches Dreieck beschreiben, so daß der eine schiefe Winkel dem $\angle$ MPG gleich sey; die Hypothenuse ist willkührlich. Wenn nun diese für r angenommen wird, so sind beide Katheten p und q.

Wir wollen ferner die bekannte Linie AF mit c, die unbekannte AP mit u und die unbekannte PM mit z bezeichnen.

Das rechtwinkliche Dreieck MPG giebt

$$r, \sin(MPG) :: MP, MC$$

oder $$r, \quad p \quad :: z, \quad MG$$

daher $$MG = \frac{pz}{r}$$

ferner

ferner r, S′ (MPG) :: PM, PG

oder r, q :: t, PG

daher $PG = \frac{tq}{r}$

Nun ist $FG = PG - PF = PS - (AP - AF)$

$= PG - AP + AF$

$= \frac{qt}{r} - u + c$

Das rechtwinkliche Dreieck MGF giebt

$MF = \sqrt{(MG^2 + FG^2)}$

also $MF = \sqrt{\left(\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)}$

Es ist aber, vermöge eines trigonometrischen Grundsatzes, $p^2 + q^2 = r^2$. Daher wird

$$MF = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)}$$

Nun soll sich MF zu MT oder AP oder u verhalten wie eine bestimmte Größe zu einer andern, z. E. wie g zu h.

Also ist MF, u :: g, h

$gu = h.$ MF

$g^2u^2 = h^2.$ $(MF)^2$

also

$$g^2u^2 = h^2\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + c^2\right)$$

$$g^2u^2 = h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + h^2u^2 + \frac{2qh^2ct}{r} - 2h^2cu + h^2c^2$$

$$0 = h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2h^2qct}{r} - 2ch^2u + h^2c^2$$

Diese Gleichung kann zu allen Kegelschnitten gehören. Es kömmt nur auf die Beschaffenheit der Differenz an, die da entstehet, wenn man das vierfache Produkt der Koeffizienten des t^2 und u^2 vom Quadrate des Koeffizienten des ut subtrahiret (IV. H. §. 23). Diese Differenz ist im gegenwärtigen Falle

$$+ \left(- \frac{2qh^2}{r}\right)^2 - 4h^2(h^2 - g^2)$$

oder $$\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$$

oder $$\frac{4q^2h^4 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$$

oder $$\frac{4r^2h^2g^2 - 4(r^2 - q^2)h^4}{r^2}$$

oder, weil $r^2 - q^2 = p^2$,

$$\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$$

Ist nun diese Größe negativ, so gehöret die gefundene Gleichung zur Ellipse; ist sie positiv, zur Hyperbel; ist sie null, zur Parabel; und dieses leztere geschiehet, wenn $4r^2h^2g^2 = 4p^2h^4$ oder $r^2g^2 = p^2h^2$ oder $rg = ph$.

Hieraus siehet man schon, daß sich unendlich viel solche Punkte M bestimmen lassen, als verlanget worden, und daß sie allemal im Umfange eines Kegelschnittes liegen, welcher entweder eine Ellipse, oder eine Hyperbel, oder eine Parabel, oder ein Zirkel seyn kann, nachdem die gegebenen Koeffizienten beschaffen sind.

Der Kegelschnitt wird in jedem Falle nach der Methode konstruiret, welche bei der allgemeinen Gleichung aller Kegelschnitte beobachtet worden. (IV. H. §. 8 &c.)

Um

Um nicht zu weitläuftig zu seyn, wollen wir nur besonders den Fall betrachten, wo der Winkel MPA oder ZAT ein rechter wäre.

In diesem Falle wird q oder der Kosinus des gegebenen Winkels $= o$, folglich

anstatt

$$h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2-g^2)u^2 + \frac{2h^2qct}{r} - 2h^2cu + h^2c^2 = o$$

bekommen wir

$$h^2t^2 + (h^2 - g^2)u^2 - 2h^2cu + h^2c^2 = o$$

oder $$t^2 + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = o$$

Weil hier im Betreff des t kein zweiter Satz ist, so können wir sogleich annehmen $t = y$, und schreiben

$$y^2 + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = o$$

oder, wenn wir der Kürze halben $1 - \frac{g^2}{h^2}$ mit f bezeichnen

$$y^2 + fu^2 - 2cu + c^2 = o$$

oder $$u^2 - \frac{2cu}{f} + \frac{c^2}{f} + \frac{y^2}{f} = o$$

Um den zweiten Satz in Betreff des u wegzuschaffen, setzen wir

$$u - \frac{c}{f} = x$$

daher $$u^2 - \frac{2cu}{f} + \frac{c^2}{f^2} = x^2$$

$$u^2 - \frac{2cu}{f} = x^2 - \frac{c^2}{f^2}$$

Man substituire diesen Werth von $u^2 - \frac{2cu}{f}$,

so ist $x^2 - \frac{c^2}{f^2} + \frac{c^2}{f} + \frac{y^2}{f} = 0$

$$\frac{y^2}{f} = \frac{c^2}{f^2} - \frac{c^2}{f} - x^2$$

$$\frac{y^2}{f} = \frac{c^2 - c^2 f}{f^2} - x^2$$

$$\frac{y^2}{f} = \frac{c^2 (1 - f)}{f^2} - x^2$$

$$y^2 = f \cdot \left[\frac{c^2 (1 - f)}{f^2} - x^2\right]$$

Nun ist $f = 1 - \frac{g^2}{h^2}$ folglich $1 - f = 1 - \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right) = \frac{g^2}{h^2}$, und $f^2 = \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)^2 = \left(\frac{h^2 - g^2}{h^2}\right)^2 = \frac{(h^2 - g^2)^2}{h^4}$, also ist

$$\frac{1 - f}{f^2} = \frac{g^2}{h^2} : \frac{(h^2 - g^2)^2}{h^4}$$

$$= \frac{g^2}{h^2} \times \frac{h^4}{(h^2 - g^2)^2}$$

$$= \frac{g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2}$$

folglich ist $y^2 = \frac{h^2 - g^2}{h^2}\left(\frac{c^2 g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2} - x^2\right)$

Ist

Ist nun h^2 größer als g^2 oder h größer als g, so wird die Gleichung vermittelst der Ellipse konstruiret. Vergleichet man sie mit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, so ist

$$\frac{1}{4}a^2 = \frac{c^2 g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2}$$

und $$\frac{1}{2}a = \frac{cgh}{h^2 - g^2} = \frac{cgh}{(h-g)(h+g)}$$

Da nun $$\frac{b^2}{a^2} = \frac{h^2 - g^2}{h^2}$$

oder $$\frac{\frac{1}{4}b^2}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{h^2 - g^2}{h^2}$$

so ist $$\frac{1}{4}b^2 : \frac{c^2 g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2} = \frac{h^2 - g^2}{h^2}$$

$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{h^2 - g^2}{h^2} \times \frac{c^2 g^2 h^2}{(h^2 - g\ )^2}$$

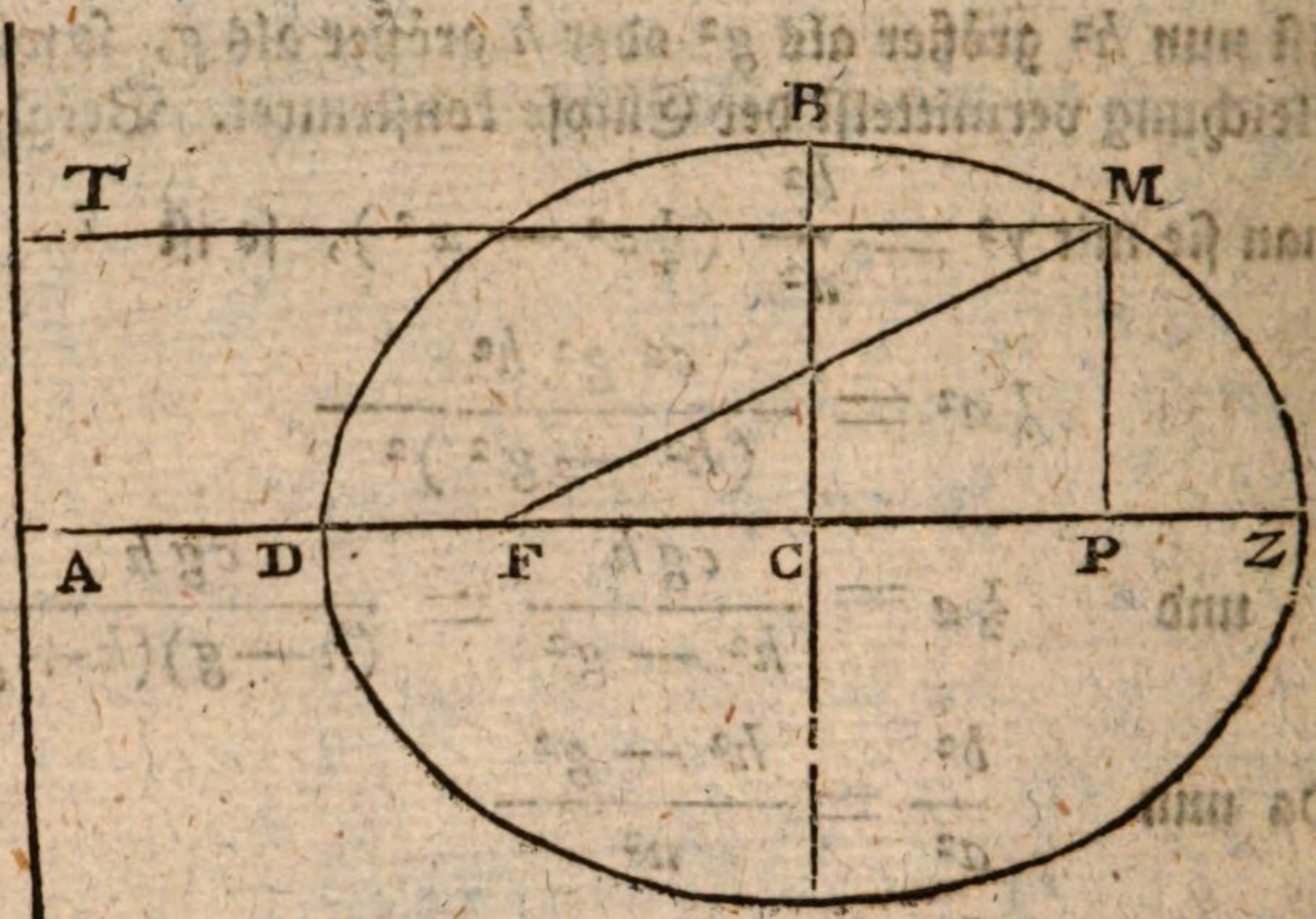
$$\frac{1}{4}b^2 = \frac{c^2 g^2}{h^2 - g^2}$$

$$\frac{1}{2}b = \frac{cg}{\sqrt{(h^2 - g^2)}}$$

Es werde demnach eine Ellipse beschrieben, deren halbe Haupt-Axe $DC = \frac{cgh}{h^2 - g^2}$, und deren halbe zweite Axe

$BC = \frac{cg}{\sqrt{(h^2 - g^2)}}$

(Siehe die folgende Figur.)



Es sey CP $= x$, PM $= y$, so ist

$$y^2 = \frac{h^2 - c^2}{h^2}\left(\frac{e^2 g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2} - x^2\right)$$

Das y in dieser Gleichung ist einerlei mit dem t in der Gleichung $t^2 + \frac{h^2 - g^2}{h^2} \cdot u^2 - 2cu + c^2 = 0$

Hingegen ist $u = x + \frac{c}{f} = x + c : \frac{h^2 - g^2}{h^2} = x + \frac{ch^2}{h^2 - g^2}$. Es muß demnach seyn $AC = \frac{ch^2}{h^2 - g^2}$ so wird $AP = PC + AC = x + \frac{ch^2}{h^2 - g^2} = u$.

Und dieses bestimmet die Entfernung AC des Mittelpunktes der Ellipse von der Linie AT. Ist nun die Ellipse beschrieben, so muß für jeden Punkt M derselben seyn FM, MI $:: g, h$

Wir betrachten nun den anderen Fall, wo in der Gleichung $y^2 = \frac{h^2 - g^2}{h^2}\left(\frac{c^2 g^2 h^2}{(h^2 - g^2)^2} - x^2\right)$ die Quantität g größer ist als h, alsdann wird $h^2 - g^2$ negativ, oder gleich $-(g^2 - h^2)$. Hingegen bleibet das Quadrat $(h^2 - g^2)^2$ allemal eine positive Größe, also ist in diesem Falle

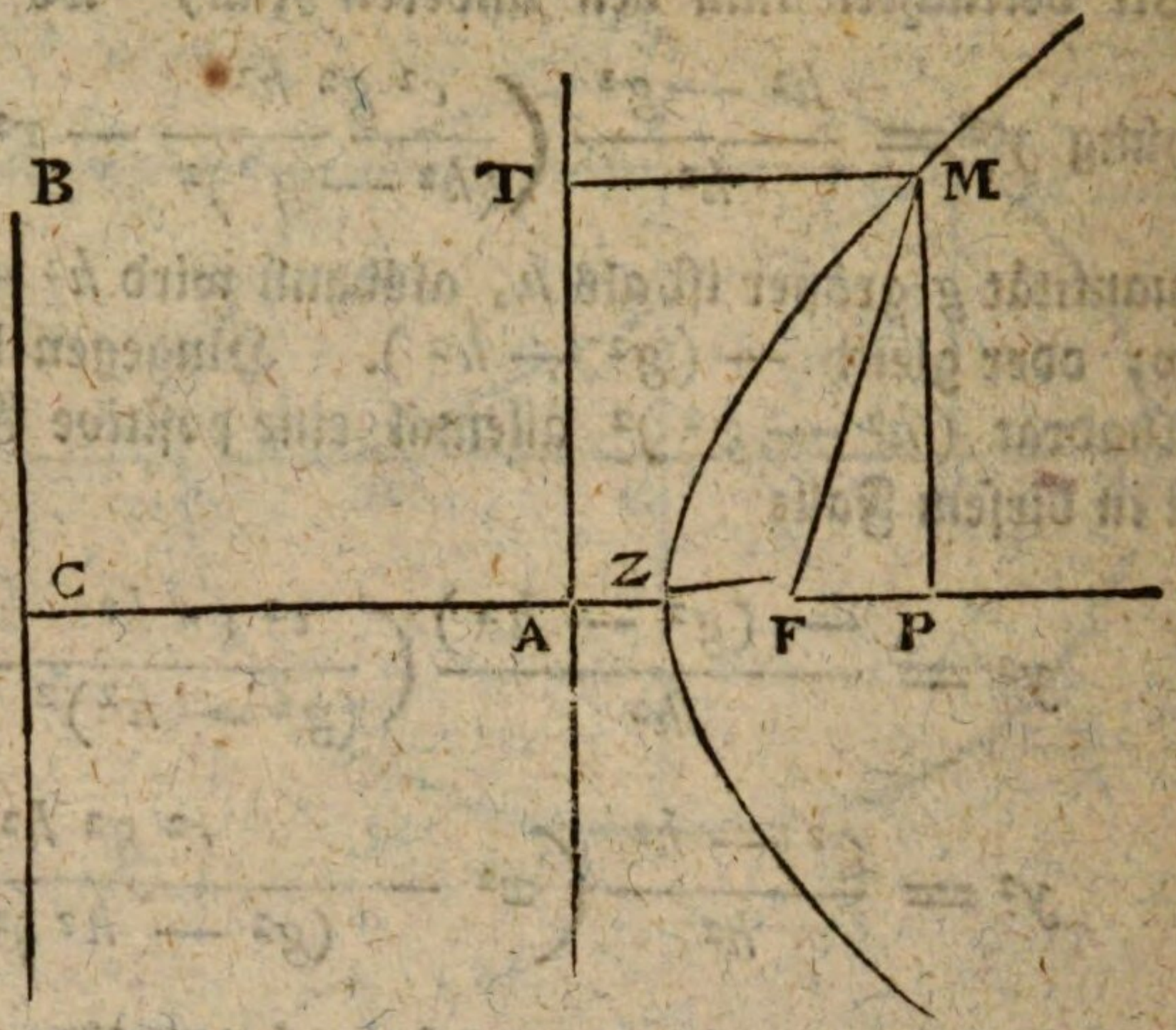
$$y^2 = \frac{-(g^2 - h^2)}{h^2}\left(\frac{c^2 g^2 h^2}{(g^2 - h^2)^2} - x^2\right)$$

$$y^2 = \frac{g^2 - h^2}{h^2}\left(x^2 - \frac{c^2 g^2 h^2}{(g^2 - h^2)^2}\right)$$

und diese Gleichung gehöret zur Hyperbel. Wenn man sie gegen die allgemeine Gleichung der Hyperbel hält, nemlich $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, so wird hier $\frac{1}{2}a = \frac{cgh}{g^2 - h^2}$ und $\frac{1}{2}b = \frac{cg}{\sqrt{(g^2 - h^2)}}$

Man beschreibe demnach die Hyperbel mit der halben Haupt-Axe $CZ = \frac{cgh}{g^2 - h^2}$, und der halben kleinen Axe $CB = \frac{cg}{\sqrt{(g^2 - h^2)}}$. Nun muß noch die Lage der Hy-

(Siehe die folgende Figur.)



perbel in Absicht der gegebenen AT bestimmet werden. Es ist angenommen worden,

$$u - \frac{c}{f} = x, \text{ oder } u - c : \frac{h^2 - g^2}{h^2} = x$$

$$\text{oder } u - \frac{c h^2}{h^2 - g^2} = x, \text{ oder weil hier } g > a$$

$$u + \frac{c h^2}{g^2 - h^2} = x, \text{ daher } u = x - \frac{c h^2}{g^2 - h^2}$$

Man mache demnach $CA = \frac{c h^2}{g^2 - h^2}$, so ist CA die Entfernung in welcher der Mittelpunkt von der Linie AT liegen muß. Dann ist $AP = CP - AC = x - \frac{c h^2}{g^2 - h^2} = u$.

Wenn $h = g$ ist, so müssen wir zur Gleichung

$$y^2 + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right) u^2 - 2cu + c^2 = 0$$

zurück kehren. Ist hier $g = h$, so wird $1 - \frac{g^2}{h^2} = 1 -$

$1 = 0$, und es bleibet nur noch

$$y^2 - 2cu + c^2 = 0$$

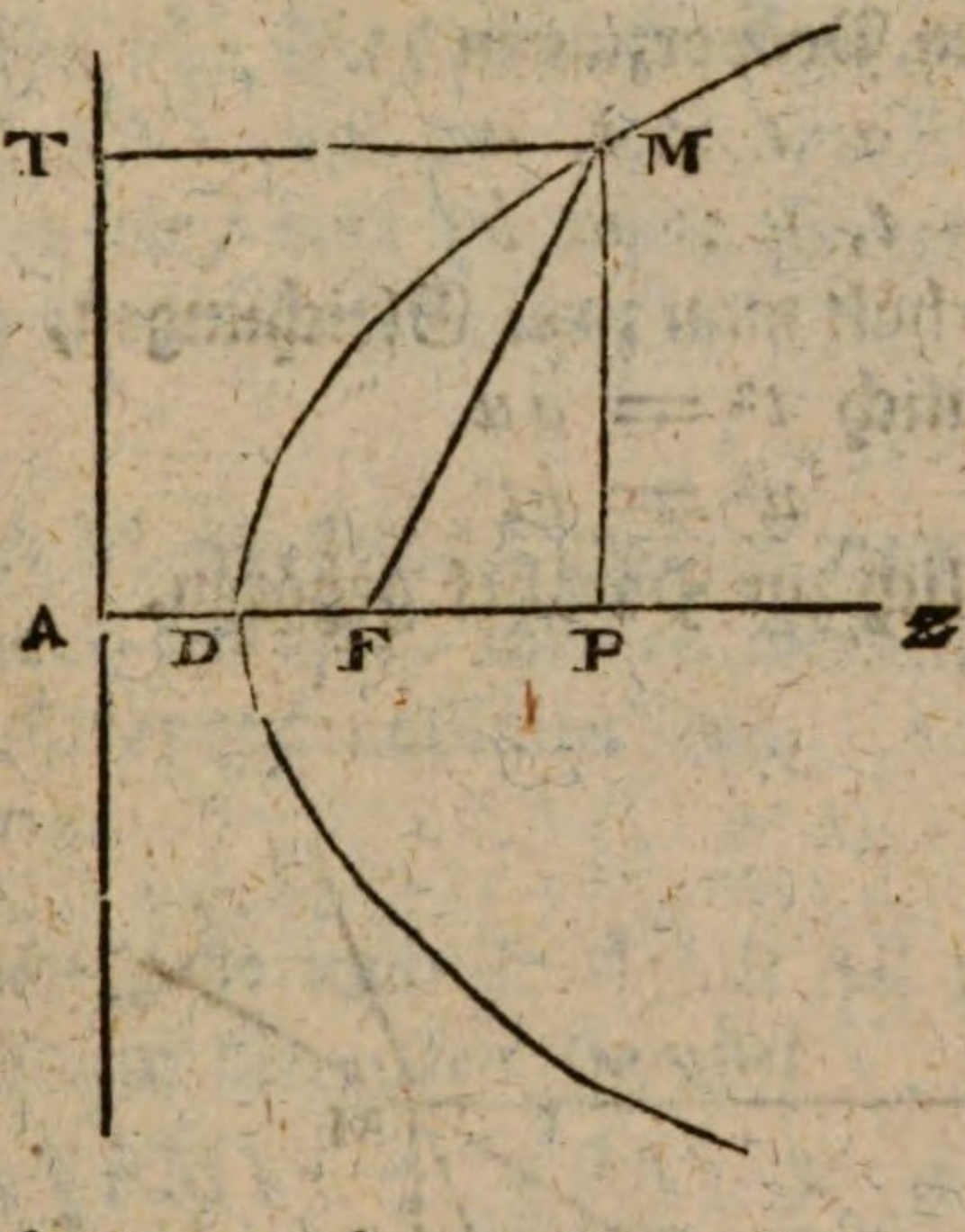
oder $y^2 = 2cu - c^2$

oder $y^2 = 2c(u - \frac{1}{2}c)$

Es sey $u - \frac{1}{2}c = x$, so ist

$$y^2 = 2cx$$

Diese Gleichung gehöret sichtbarlich zur Parabel.



Man beschreibe demnach eine Parabel mit dem Parameter $2c$, so ist $DP = x$, $PM = y$. Um die Lage der Parabel näher zu bestimmen, so ist $u = x + \frac{1}{2}c$. Man mache demnach $AD = \frac{1}{2}c = DF$, so ist D der Scheitel der Parabel, und es ist $AP = DP + AD = x + \frac{1}{2}c = u$.

§. 5.

Wir haben schon im Zusatze des §. 3. ein Beispiel gesehen, welches zu erkennen giebt, wie zwei Zirkel oder andere krumme Linien, deren jede zur Auflösung einer unbestimmten Aufgabe dienet, vermöge ihrer Durchschnitte,

eine bestimmte Aufgabe auflösen können. Hiervon wollen wir jezt noch einige Exempel geben.

§. 6.

Aufgabe.

Zwischen zwei geraden Linien *a* und *b* sollen zwei mittlere Proporzional-Linien gefunden werden.

Auflösung. Es seyen *t* und *u* die verlangten Linien, so hat man folgende Progression

$$\dot{\dot{-}} \; a,\ t,\ u,\ b$$

oder diese beiden Proporzionen

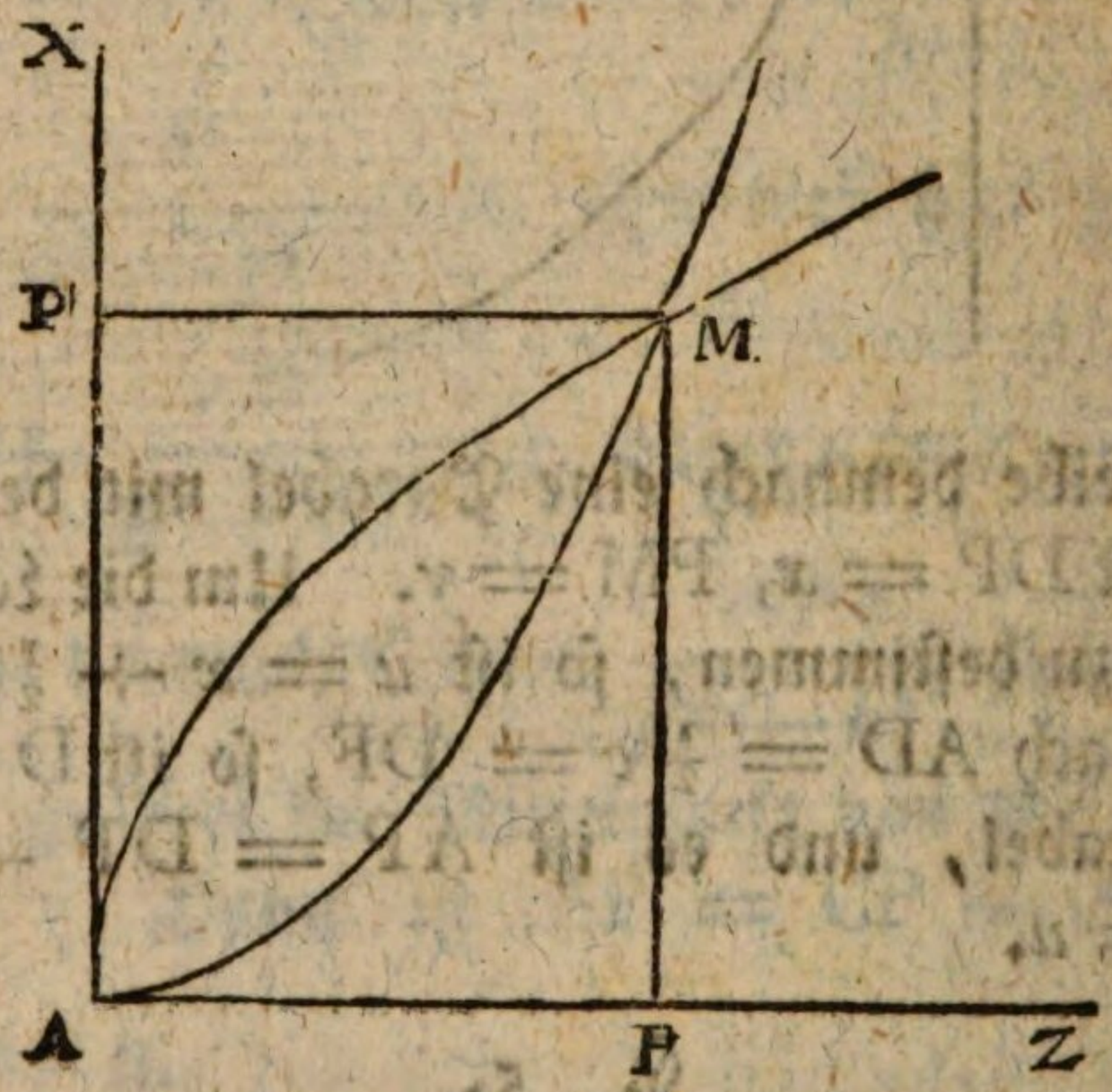
$$a,\ t :: t,\ u$$

$$t,\ u :: u,\ b$$

Hieraus erhält man zwei Gleichungen, nemlich $t^2 = au$

$$u^2 = bt$$

welche sichtbarlich zur Parabel gehören.



Man ziehe demnach zwei gerade Linien AZ und AX, unter einem willkührlichen Winkel, z. E. einem rechten.

Man

Man nehme AZ zum Diameter der Parabel, A zum Ursprunge des Diameters, XAZ zum Koordinaten-Winkel, und a zum Parameter des Diameters AZ, und beschreibe mit diesen gegebenen Größen eine Parabel, so wird sie der Ort der Gleichung $t^2 = au$ seyn, so daß jede Abeisse AP das u, und jede Applikate PM das t der Gleichung $t^2 = au$ ausdrücken wird. Hat man einen rechten Winkel ZAX angenommen, so ist AZ die Axe der Parabel, und a der Parameter der Axe.

Auf eine ähnliche Art konstruire man auf dem Diameter oder der Axe AX, mit dem Koordinaten-Winkel ZAX und dem Parameter b eine Parabel, so wird sie der Ort der Gleichung $u^2 = bt$ seyn.

Der Punkt M, wo beide Parabeln einander schneiden, wird die Aufgabe auflösen, und es werden PM und AP beide mittlere Proporzionallinien seyn.

Denn, man ziehe noch P′M mit AP parallel, so ist, vermöge der Natur der ersten Parabel

$$(PM)^2 = (PA) \times a$$

oder a, PM :: PM, AP

und vermöge der Natur der zweiten Parabel ist

$$(P'M)^2 = (AP') \times b$$

Es ist aber P′M = AP, und AP′ = PM, also

$$(AP)^2 = PM \times b$$

oder PM, AP :: AP, b

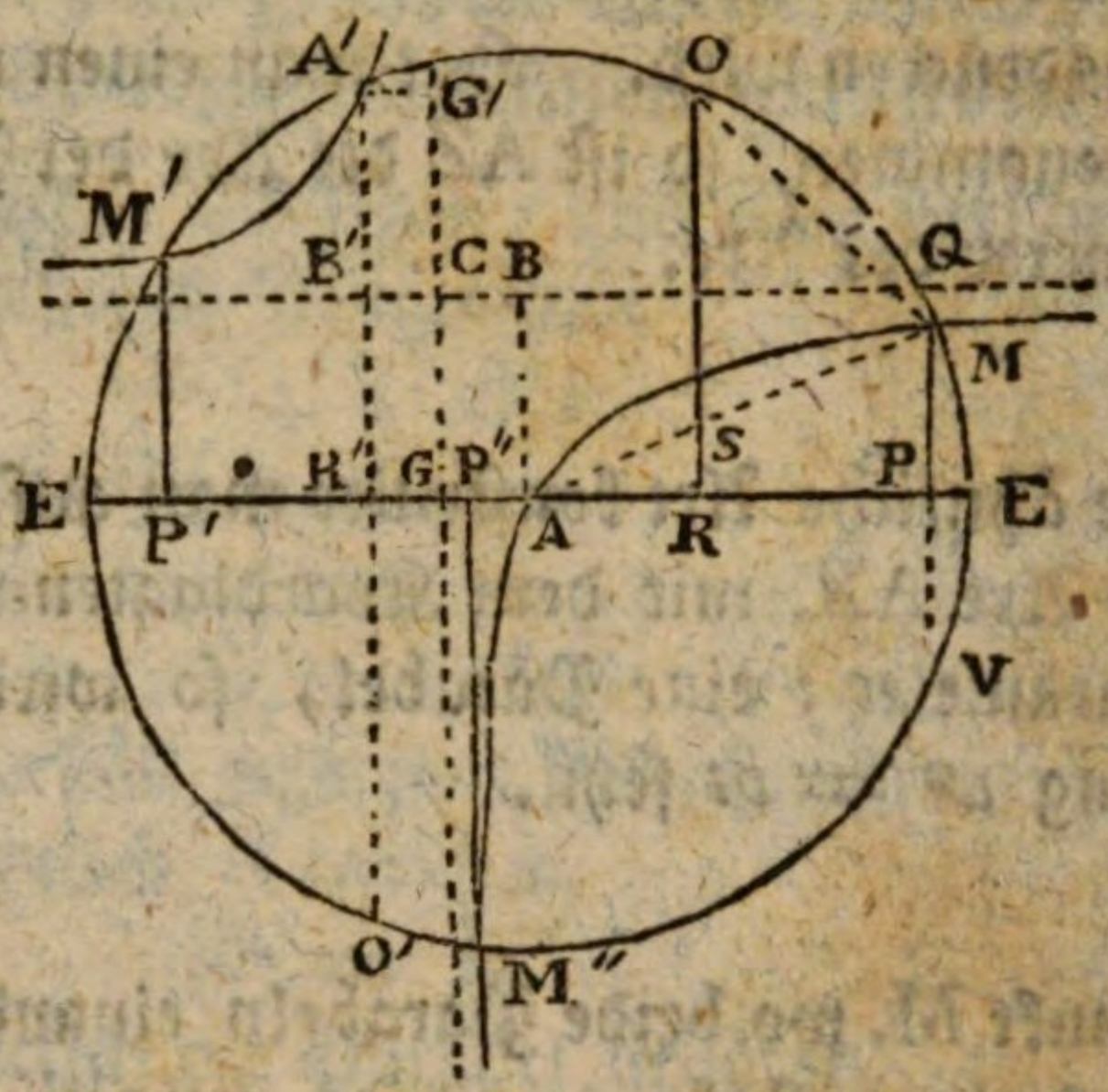
Also ist a, PM :: PM, AP :: AP, b

oder $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ a, PM, AP, b

§. 7.

Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel oder Zirkelbogen in drei gleiche Theile eintheilen.



Auflösung. Es sey EO der gegebene Bogen, und A dessen Mittelpunkt. Laßt uns annehmen, es sey EM der verlangte dritte Theil des Bogens EO. Man ziehe die Halbmesser EA, MA, und die Linien MP, OR auf EA senkrecht. Die Linien OR und AR sind der Sinus und der Kosinus des Bogens EO, und folglich als bekannt anzusehen. Es sey demnach der Sinus OR $= d$, der Kosinus AR $= c$, und der Halbmesser AE $= r$. Endlich sey die unbekannte AP $= u$, und die unbekannte PM $= t$.

Dieses vorausgesetzet, so giebt das rechtwinkliche Dreieck APM

$$u^2 + t^2 = r^2$$

oder

$$t^2 = r^2 - u^2$$

Ferner geben die ähnlichen Dreiecke APM, ARS,

AP, PM :: AR, RS

oder

oder $u, t :: c, RS$

daher $RS = \frac{ct}{u}$

Wenn man nun MP bis in V verlängert, so ist der Bogen MV dem Bogen MO gleich, weil jeder doppelt so groß ist als der Bogen EM. Folglich ist $\angle OMA = \angle AMV$ oder $\angle OMS = \angle AMP = \angle ASR = \angle OSM$. Da nun $\angle OMS = \angle OSM$, so ist $OS = OM$, oder, weil $OM = MV = 2MP = 2t$, so ist $OS = 2t$.

Nun ist $OR = OS + SR$

folglich $d = 2t + \frac{ct}{u}$

oder $du = 2tu + ct$

oder $\frac{1}{2}du = tu + \frac{1}{2}ct$

Wir haben demnach zwei Gleichungen zu konstruiren. Die erste $t^2 = r^2 - u^2$ ist ganz konstruiret, weil sie den gegebenen Zirkel ausdrücket, wovon der Bogen EO ein Theil ist. Die andere Gleichung $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$ gehöret zur Hyperbel (IV. H. §. 21) und weil beide Quadrate t^2 und u^2 fehlen, so muß man, wie am angeführten Orte vorgeschrieben worden, die Sätze, welche u enthalten, in ein Glied bringen, welches giebt

$\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$

$(\frac{1}{2}d - t)u = \frac{1}{2}ct$

Man mache $\frac{1}{2}d - t = y$, oder $t = \frac{1}{2}d - y$, so kömmt

$uy = \frac{1}{2}c(\frac{1}{2}d - y)$

$uy = \frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}cy$

$uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$

$(u + \frac{1}{2}c)y = \frac{1}{4}cd$

Nun sey $u + \frac{1}{2} c = x$, so bekömmt man

$$xy = \frac{1}{4} cd$$

Diese Gleichung zeiget eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten an, welche folgendermaßen bestimmet werden:

In der Entfernung $AB = \frac{1}{2} d$ ziehe QB mit AE parallel. Verlängere PM bis in Q, so ist $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2} d - t = y$. Folglich bestimmet QB die Lage der einen Asymptote.

Verlängere AP nach G zu, so daß $AG = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} AR$. Ziehe GC parallel mit PQ, so ist $GP = AP + AG = AP + \frac{1}{2} AR = u + \frac{1}{2} c = x = CQ$.

Folglich sind CQ und CG Theile der beiden Asymptoten, uud C ist der Mittelpunkt der Hyperbel. Diese Hyperbel gehet durch den Punkt A. Denn es ist $xy = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} d = AG \times AB = CB \times AB$, woraus man siehet, daß der Punkt A zur Hyperbel gehöret.

Da nun beide Asymptoten und ein Punkt A der Hyperbel gegeben sind, so läßt sich diese krumme Linie vermittelst der im §. 27. des IIIten Hauptstücks gegebenen Methode beschreiben. Diese Hyperbel wird nun den Zirkel im verlangten Punkte M schneiden, so daß $EM = \frac{1}{3} EO$.

Wenn der Bogen EO mehr als 90 Grade hält, so fällt sein Kosinus AR auf die andere Seite des Mittelpunkts und wird negativ, folglich muß in diesem Falle in obigen Gleichungen allenthalben $-c$ anstatt $+c$ geschrieben werden. Fällt der Bogen zwischen 180 und 270 Grad wie EOE'O' so sind der Sinus und der Kosinus beide negativ, und es müssen $+d$ und $+c$ in $-d$ und $-c$ verwandelt werden.

Zusatz. Man verlängere GC, so daß CG′ = CG, und CB, so daß CB′ = CB. Man ziehe B′A′ mit CG′ und G′A′ mit B′C parallel. Zwischen den Asymptoten CG′ und CB′ (welche man so viel als nöthig ist verlängern kann), und durch den Punkt A′ beschreibe man eine Hyperbel, so wird dieselbe den Umkreis des Zirkels in zwei Punkten A′ und M′ schneiden, eben so wie die erste Hyperbel in M und M″. Von diesen vier Punkten verdienen die drei Punkte M, M′ und M″ gemerkt zu werden. Der erste M giebt den den dritten Theil des Bogens EM; der andere M′ giebt den dritten Theil des Supplements E′O; der dritte M″ giebt den dritten Theil E′M″ des Bogens EOE′O′ welcher um 180 Grad größer ist, als der erste Bogen EO.

Der Bogen E′O hat den nemlichen Sinus OR und den nemlichen Kosinus AR als der Bogen EO, nur ist der Kosinus AR negativ. Um also den dritten Theil des Bogens E′O zu finden, wird alles wie vorher gethan, nur daß AR oder c negativ wird. Daraus aber entstehet weiter keine Veränderung, als daß $xy = \frac{1}{4}cd$ sich in $xy = -\frac{1}{4}cd$, welche Gleichung zur Hyperbel A′M′ gehöret, und zu erkennen giebt, daß der Punkt M′ wo diese Hyperbel den Zirkel schneidet, den dritten Theil E′M′ des Bogens E′O bestimmet. Wir werden bald die Ursach anzeigen, warum es nicht der Punkt A′ ist, der hier die Auflösung giebt.

Man nehme den Bogen EOE′O′ um 180 Grad größer als EO, das ist, man mache E′O′ = EO, so ist R′O′ der Sinus und AR′ der Kosinus des Bogens EOE′O′, und es ist R′O′ = RO und AR′ = AR, weil E′O′ = EO, nur sind hier der Sinus und der Kosinus negative Größen, weil sie in Rücksicht auf den Sinus und Kosinus

des

des Bogens EO eine entgegengesezte Lage haben. Nimmt man also d und c negativ in der Gleichung $xy = \frac{1}{4}cd$, so bekömmt man $xy = (-\frac{1}{2}c) \cdot (-\frac{1}{2}d) = xy = \frac{1}{4}cd$, welches die erste Hyperbel war. Also giebt die erste Hyperbel MAM'' vermöge des Punktes M'' wo sie zum zweitenmale den Zirkel schneidet, die Auflösung dieses dritten Falles, und es ist P''M'' der Sinus des gesuchten Bogens, dieser ist also E'M'' und machet den dritten Theil des Bogens EOE'O'.

Die nemliche Konstrukzion, welche den dritten Theil eines Bogens A giebt, bestimmet also zugleich den dritten Theil von $180^{s} - A$ und den dritten Theil von $180^{s} + A$,

Die Hyperbel schneidet noch den Zirkel in A. Denn es ist gemacht worden $B'A' = AB$ und $B'C = CB$, folglich ist $AR' = AR$ und $R'A' = RO$, und also lieget der Punkt A, durch welchen die Hyperbel gezogen worden, im Umkreise des Zirkels. Dieser Punkt A giebt aber keine neue Auflösung, weil dessen Lage gar nicht von der gefundenen Gleichung abhängt, sondern aus anderen Gründen bestimmet worden.

§. 8.

Die vorige Aufgabe führte uns zu diesen beiden Gleichungen

$$2tu + ct = du$$

und

$$u^2 + t^2 = r^2$$

Aus der ersten wird $t = \frac{du}{2u + c}$

$$t^2 = \frac{d^2 u^2}{4u^2 + 4cu + c^2}$$

Man

Man substituire diesen Werth von r^2 in die zweite Gleichung, so kömmt

$$u^2 + \frac{d^2 u^2}{4u^2 + 4cu + c^2} = r^2$$

$$4u^4 + 4cu^3 + c^2u^2 + d^2u^2 = 4r^2u^2 + 4cr^2u + c^2r^2$$

oder da $c^2 + d^2 = r^2$

$$4u^4 + 4cu^3 + r^2u^2 = 4r^2u^2 + 4cr^2u + c^2r^2$$

$$4u^4 + 4cu^3 + \ldots = 3r^2u^2 + 4cr^2u + c^2r^2$$

$$4u^3 (u + c) \ldots = 3r^2u(u + c) + cr^2(u + c)$$

oder, wenn man alles durch $u + c$ dividiret,

$$4u^3 = 3r^2u + cr^2$$

oder $$4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$$

Diese Gleichung muß nun die drei Fälle enthalten, die wir untersuchet haben, und folglich drei Wurzeln haben; welches auch eintrift: denn es ist, vermöge der Auflösung, u sowohl AP als auch AP′ und AP″; und wenn AP als positiv betrachtet wird, so werden AP′ und AP″ negativ, wegen der entgegengesetzten Lage. Folglich hat die Gleichung $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$ drei Wurzeln, eine positive und zwei negative.

§. 9.

Wenn man die Gleichung $4u^3 = 3r^2u + cr^2$ oder $u^3 = \frac{3}{4}ru^2 + \frac{1}{4}cr^2$, nach der Cardanischen Regel auflöset, so findet man

$$u = \sqrt[3]{\frac{cr^2 + \sqrt{(c^2r^4 - 4r^6)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{cr^2 - \sqrt{(c^2r^4 - 4r^6)}}{2}}$$

Soll nun die Wurzel möglich seyn, so muß $c^2r^4 - 4r^6$ eine positive Größe seyn, folglich muß seyn

$$c^2r^4 > 4r^6$$
$$cr^2 > 2r^3$$
$$c > 2r$$

das heißt, der Kosinus c des gegebenen Bogens, wovon der dritte Theil gesuchet wird, müste größer seyn, als der Durchmesser des Zirkels, welches unmöglich ist. Also giebt die Cardanische Regel nur eine imaginäre Wurzel, da doch die Gleichung in der That drei wirkliche Wurzeln hat, nemlich eine positive und zwei negative.

Dieser Fall, wo die Cardanische Regel, für eine Gleichung des dritten Grades, die Wurzel unter einer imaginären Gestalt giebt, wird von den Algebristen der irreduktible Fall genannt.

Da wir aber wissen, daß die drei Wurzeln der irreduktibeln Gleichung $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$ keine andere sind, als die Kosinusse der Bogen $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^g - EO)$ und $\frac{1}{3}(180^g + EO)$, und da jede Gleichung des dritten Grades auf die Form $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$ zurückgebracht werden kann, so läßt sich jede Gleichung des dritten Grades, vermittelst der trigonometrischen Tafeln, auflösen. Es sey überhaupt

$$u^3 - pu + q = 0$$

Halten wir diese Gleichung gegen die vorige, so wird hier

$$-\tfrac{3}{4}r^2 = -p$$
$$\tfrac{3}{4}r^2 = p$$
$$r^2 = \tfrac{4}{3}p$$
$$r = \sqrt{(\tfrac{4}{3}p)}$$

Ferner wird

$$-\tfrac{1}{4}cr^2 = q$$
$$-\tfrac{1}{4}c(\tfrac{4}{3}p) = q$$
$$-\tfrac{1}{3}cp = q$$
$$-cp = 3q$$
$$c = -\frac{3q}{p}$$

Be:

Bezeichnen wir nun den Halbmesser der Tafeln mit R, so bekommen wir den Kosinus des Bogens EO, wie er in den Tafeln stehet, vermöge dieser Proporzion,

$$r, c :: R, \mathfrak{S}'(EO)$$

oder $$\sqrt{(\tfrac{4}{3}p)}, -\frac{3q}{p} :: R, \mathfrak{S}'(EO)$$

daher $$\mathfrak{S}'(EO) = \frac{-3qR}{p\sqrt{(\tfrac{4}{3}p)}}$$

Suchet man nun die Zahl $\frac{3qR}{p\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}$ in den Tafeln, so findet man den Bogen, dessen Komplement diese Zahl zum Sinus hat. Wenn man also zu den gefundenen Graden 90^g addiret, oder wenn man diese Grade von 90^g abziehet, nachdem q in der Gleichung positiv oder negativ ist, so bekömmt man den Bogen EO, den wir A nennen wollen. Nun bleibet also nichts mehr zu thun, als daß man in den nemlichen Tafeln die Kosinusse der drei Bogen $\frac{1}{3}A$, $\frac{1}{3}(180^g - A)$ und $\frac{1}{3}(180^g + A)$ suche. Da aber diese Kosinusse für den Halbmesser R gerechnet sind, so müssen sie auf den Halbmesser r oder $\sqrt{(\frac{4}{3}p)}$ zurückgeführet werden. Deswegen sage man

$$R, \sqrt{(\tfrac{4}{3}p)} :: \mathfrak{S}'(\tfrac{1}{3}A), \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cdot \mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}A$$

$$R, \sqrt{(\tfrac{4}{3}p)} :: \mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}(180^g - A), \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}\,\mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}(180^g - A)$$

$$R, \sqrt{(\tfrac{4}{3}p)} :: \mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}(180^g + A), \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} \cdot \mathfrak{S}'\tfrac{1}{3}(180^g + A)$$

Also haben wir die drei Wurzeln der Gleichung

$$u^3 - pu + q = 0$$

nemlich es ist $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} . \mathfrak{S}' \frac{1}{3} A$

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} . \mathfrak{S}' \tfrac{1}{3}(180^g - A)$$

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} . \mathfrak{S}' \tfrac{1}{3}(180^g + A)$$

wo unter R der Halbmesser der Tafeln verstanden wird. $\mathfrak{S}'$ bedeutet der Kosinus der Tafeln. Unter A verstehet man den Bogen, der in den Tafeln die Zahl $-\frac{R}{\sqrt{\frac{4}{3}p}} . \frac{3q}{p}$ zum Kosinus hat. Von diesen drei Werthen des u muß man diejenigen negativ machen, deren Bogen 90 Grad übertrift, es müste denn der Bogen 270 Grad übertreffen, in welchem Fall der Kosinus wiederum positiv wird.

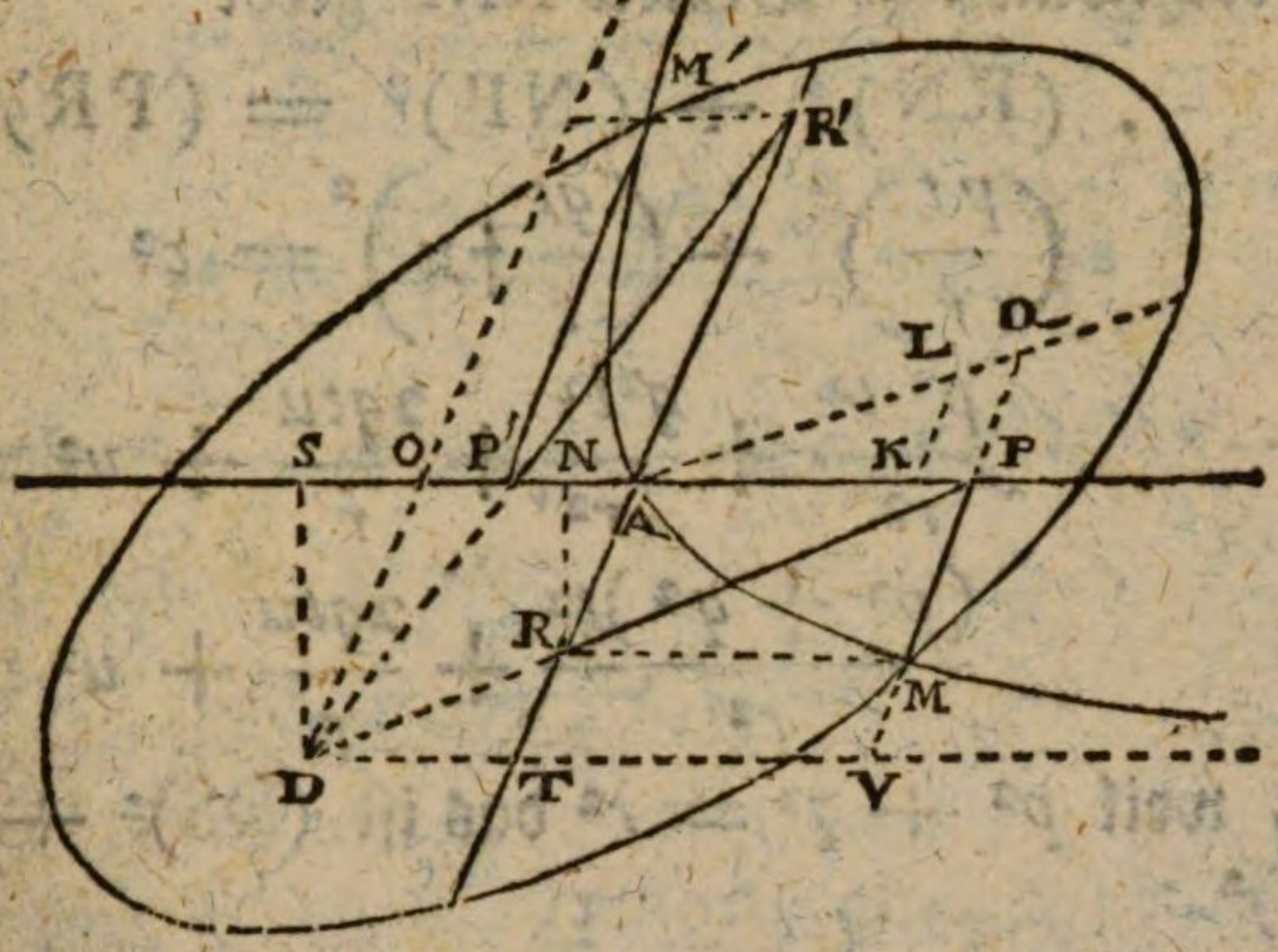
Die vorfallenden Operazionen können übrigens durch Hülfe der Logarithmen erleichtert werden. Es könnten noch manche Betrachtungen über diese trigonometrische Auflösung der Gleichungen des dritten Grades beigefüget werden; weil sie aber hier nicht zur Hauptsache gehöret, sondern nur gelegentlich erwähnet worden, so können wir dabei nicht länger verweilen.

§. 10.

Aufgabe.

Es sind zwei gerade Linien AP, AR der Lage nach gegeben, welche folglich einen bekannten Winkel bilden. Außerhalb dieses Winkels ist ein Punkt D gegeben. Aus diesem Punkte D soll eine gerade Linie DP gezogen werden, so daß der im Winkel lie-

liegende Theil RP einer gegebenen geraden Linie gleich sey.



Auflösung. Aus D fälle DS senkrecht auf die verlängerte AP. Ziehe auch DO mit AR parallel. Aus dem noch unbekannten Punkte R laßt uns RN ebenfalls auf AP senkrecht fällen. Die Linien DO, DS, AO, OS sind als bekannt zu betrachten, weil die Lage des Punktes D sowohl als der Winkel RAP, folglich auch $\angle$ RAN $= \angle$ DOS bekannt sind. Es sey demnach DO $= r$, DS $= p$, OS $= q$, AO $= d$. Die Linie, welcher die RP gleich gemacht werden soll, sey $= c$. Endlich sey die unbekannte AP $= u$, und die unbekannte AR $= t$.

Nun geben die ähnlichen Dreiecke DSO, RNA

DO, DS :: AR, RN

r, p :: t, RN

daher $$\text{RN} = \frac{pt}{r}$$

Ferner ist DO, OS :: AR, AN

r, q :: t, AN

daher $$\text{AN} = \frac{qt}{r}$$

folglich $NP = AN + AP = \frac{qt}{r} + u$

Das rechtwinkliche Dreieck RNP giebt

$$(RN)^2 + (NP)^2 = (PR)^2$$

$$\left(\frac{pt}{r}\right)^2 + \left(\frac{qt}{r} + u\right)^2 = c^2$$

$$\frac{p^2 t^2}{r^2} + \frac{q^2 t^2}{r^2} + \frac{2qtu}{r} + u^2 = c^2$$

$$\frac{(p^2 + q^2)t^2}{r^2} + \frac{2qtu}{r} + u^2 = c^2$$

Oder, weil $p^2 + q^2 = r^2$ das ist $(DS)^2 + (OS)^2 = (DO)^2$

$$t^2 + \frac{2q}{r} ut + u^2 = c^2$$

Dieses ist nun eine Gleichung zwischen t und u. Aber um diese beiden unbekannten Größen zu bestimmen, wird noch eine zweite Gleichung erfordert. Deswegen betrachte man die ähnlichen Dreiecke DOP, RAP. Diese geben

$$DO, RA :: OP, AP$$
$$r, \quad t :: (d+u), u$$

daher $ru = dt + ut$

Dieses ist die zweite Gleichung. Die erste gehöret zur Ellipse, und diese leztere zur Hyperbel.

Um die erste, nemlich $t^2 + \frac{2q}{r} ut + u^2 = c^2$

zu konstruiren, so nehme man an $t + \frac{qu}{r} = y$, folglich

$t^2 + \frac{2qut}{r} + \frac{q^2 u^2}{r^2} = y^2$, oder $t^2 + \frac{2qut}{r} = y^2 - \frac{q^2 u^2}{r^2}$. Also wird

y^2

$$y^2 - \frac{q^2 u^2}{r^2} + u^2 = c^2$$

$$y^2 + \frac{r^2 u^2 - q^2 u^2}{r^2} = c^2$$

$$y^2 + \frac{(r^2 - q^2) u^2}{r^2} = c^2$$

oder, weil $r^2 - q^2 = p^2$, das ist $(DO)^2 - (OS)^2 = (DS)^2$

$$y^2 + \frac{p^2 u^2}{r^2} = c^2$$

Nun sey $u = \frac{lx}{n}$ (IV. H. §. 19.), so wird

$$y^2 + \frac{p^2 l^2 x^2}{r^2 n^2} = c^2$$

Weil l und n willkührlich sind, so hindert uns nichts, anzunehmen, es sey $l = r = DO$, dann ist

$$y^2 + \frac{p^2 x^2}{n^2} = c^2$$

$$y^2 = c^2 - \frac{p^2}{n^2} x^2$$

$$y^2 = \frac{p^2}{n^2}\left(\frac{n^2 c^2}{p^2} - x^2\right)$$

Wenn man diese Gleichung gegen die allgemeine Gleichung der Ellipse hält, nemlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\tfrac{1}{4}a^2 - x^2\right)$$

so wird hier $\frac{1}{4}a^2 = \frac{n^2 c^2}{p^2}$, folglich $\frac{1}{2}a = \frac{nc}{p}$, $a = \frac{2nc}{p}$

ferner wird $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p^2}{n^2}$

$$b^2 : \frac{4n^2\,c^2}{p^2} = \frac{p^2}{n^2}$$

$$b^2 = \frac{p^2}{n^2} \times \frac{4n^2\,c^2}{p^2}$$

$$b^2 = 4c^2$$

$$b = 2c$$

Folglich sind die beiden Axen bekannt, nemlich $a = \frac{2nc}{p}$ und $b = 2c$. Es muß aber noch die willkührliche Größe n bestimmet werden, um die Lage der Ellipse zu bekommen.

Gesetzt, man gebe der u oder AP nach und nach verschiedene Werthe, und man ziehe durch das Ende jeder AP eine gerade Linie PM mit AR parallel. Gesetzt, ferner, man gebe jeder PM den Werth von t, welcher, in der Gleichung zwischen u und t, zum angenommenen Werthe von u der AP gehöret, so werden die Punkte M in der krummen Linie liegen, wodurch unsere Aufgabe aufgelöset werden soll. Dieses vorausgesetzet, so nehme man willkührlich AK auf AP, ziehe KL parallel mit PM, und sage r, q :: AK, KL. Man ziehe AL und verlängere PM bis in Q, so ist

AK, KL :: AP, PQ

$r, \quad q$ :: u, PQ

daher $PQ = \frac{qu}{r}$

folglich $QM = PM + PQ = t + \frac{qu}{r} = y$

folglich ist AL die Lage des Diameters, worauf die Applikaten y errichtet werden müssen, und auf welchem auch die Abzissen x genommen werden. Die angenommene Gleichung $u = \frac{l}{n}x$ oder $u = \frac{r}{n}x$ giebt zu erkennen, daß

wenn

wenn $u = o$, auch $x = o$ seyn müssen, und daß folglich die Größen x und u im nemlichen Punkte anfangen, nemlich im Punkte A. Folglich ist $AQ = x$. Hieraus wird die Gleichung $u = \frac{rx}{n}$ zu $u = \frac{r.\ AQ}{n}$

$$\text{daher } n = \frac{r.\ AQ}{u} = \frac{r.\ AQ}{AP} \text{ oder}$$

$$r,\ n :: AP,\ AQ$$

$$r,\ n :: AK,\ AL$$

Weil AK willkührlich ist, so können wir annehmen $AK = r$, dann ist

$$r,\ u :: r,\ AL$$

$$\text{oder } n = AL$$

Es werde demnach eine Ellipse konstruiret, deren konjugirten Diameter sich unter dem Winkel AQM oder ALK schneiden. Der Diameter, der in der Lage AQ seyn soll, werde gemacht $= \frac{2cn}{p}$ der andere dessen Richtung durch AR gehet, werde gemacht $= 2c$. Wenn solche Ellipse nach den gewöhnlichen Regeln (III. H. §. 13.) konstruiret wird, so ist ihr Umfang der Ort der ersten Gleichung.

Nun muß noch die zweite Gleichung konstruiret werden, nemlich

$$ru = dt + ut$$

$$\text{oder } ru - tu = dt$$

$$\text{oder } (r - t)\ u = dt$$

Es sey $r - t = y'$ folglich $t = r - y'$ so ist

$$uy' = d(r - y')$$
$$uy' = dr - dy'$$
$$uy' + dy' = dr$$
$$(u+d)\,y' = dr$$

Es sey $u + d = x'$ so ist

$$x'y' = dr$$

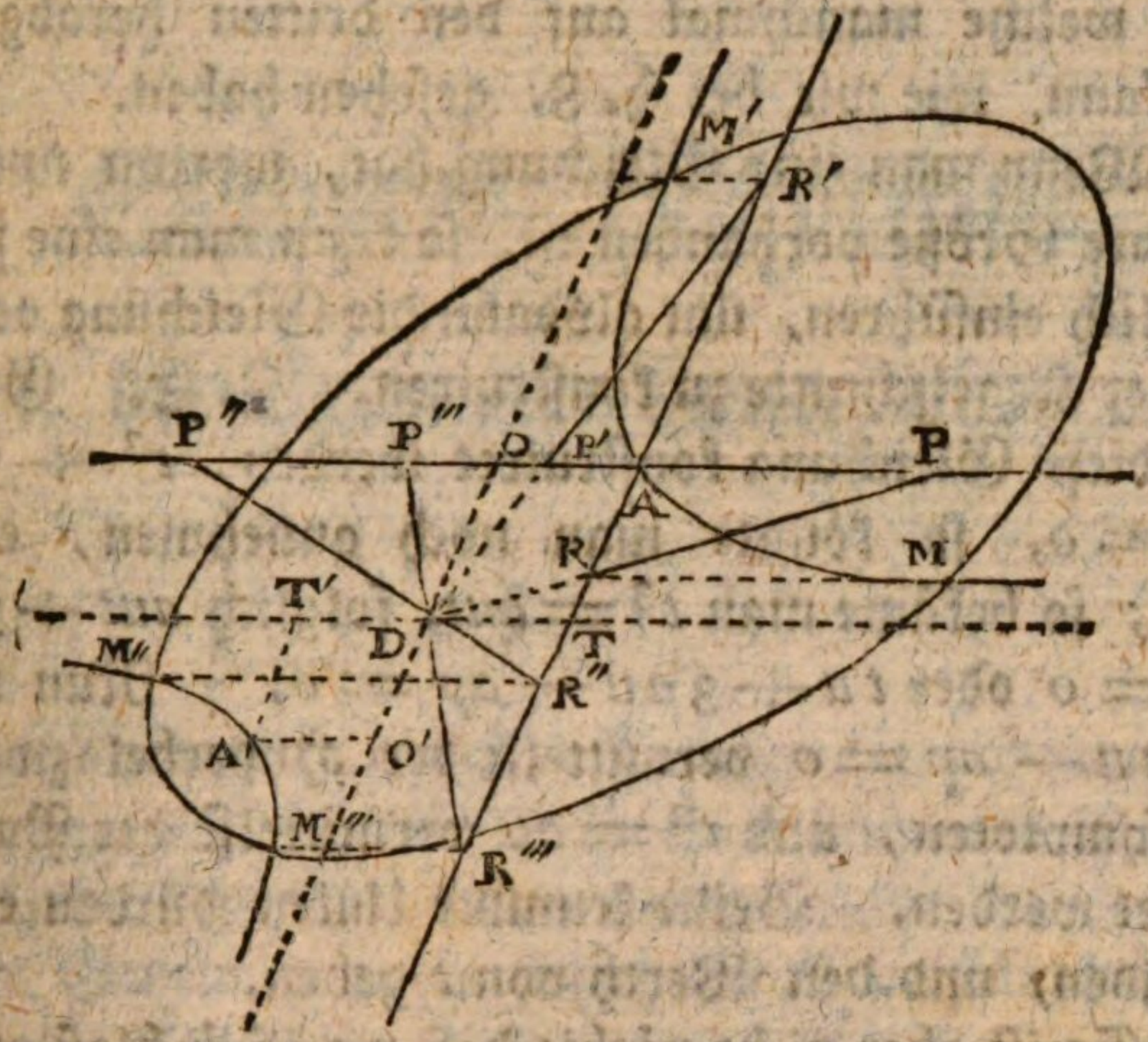
Diese Gleichung gehöret zur Hyperbel zwischen ihren Asymptoten. Weil nun $r - t = y'$, so nehme man auf AR die $AT = r = OD$, und ziehe durch T oder, welches einerlei ist, durch D die Linie DTV mit AP parallel, so wird seyn $VM = PV - PM = AT - PM = OD - PM = r - t = y'$. Folglich ist DV die eine Asymptote. (Siehe die vorige Figur.)

Ferner, da $u + d = x'$, so nehme man $OA = d$, das heißt, durch den Punkt D ziehe man DO parallel mit AF, so ist $DV = DT + TV = OA + AP = d + u = x'$. Folglich ist DO die Lage der anderen Asymptote und D ist der Mittelpunkt der Hyperbel.

Die Hyperbel wird noch dadurch bestimmet, daß sie durch den Punkt A gehen muß. Denn es ist $OA \times AT = dr = x'y'$ folglich gehöret der Punkt A zur Hyperbel.

Man beschreibe demnach eine Hyperbel zwischen den Asymptoten DV und DO durch den Punkt A (III. H. §. 27. Zus.) so wird dieselbe die Ellipse in zwei Punkten M und M'' schneiden. Durch diese Punkte ziehe man MR, M'R' mit AP parallel, so bekömmt man zwei Punkte R und R'. Durch dieselben und den gegebenen Punkt D ziehe man die geraden DRP, DP'R', so werden die Theile PR, P'R' die in den gleichen Winkeln RAP, R'AP' liegen, jede der gegebenen Linie c gleich seyn.

Zusatz. Wenn man die Asymptoten verlängert, so kann man zwischen denselben die entgegengesetzte Hyperbel



M'' A'M''' beschreiben. In dem Falle nun, wo auch diese Hyperbel die Ellipse schneidet, wird sie noch zwei Punkte M'' und M''' bestimmen, welche ebenfalls die Aufgabe auflösen. Man ziehe durch M'' und M''' gerade Linien mit AP parallel, so bekömmt man auf AT die Punkte R'' und R'''. Durch diese und den gegebenen Punkt D ziehe man R''DP'' und R'''DP''' bis zur verlängerten AP, so werden diese im Winkel RAP'' liegenden Linien ebenfalls jede der gegebenen Linie *c* gleich seyn.

§. 11.

Die vorigen Aufgaben sind hinlänglich, um dem Anfänger einen deutlichen Begriff von der Konstrukzion der Gleichungen vermöge der Kegelschnitte zu geben. Zulezt wollen wir noch einige Anmerkungen hierüber machen.

I) Diese Konstrukzionen können nicht gebrauchet werden, wenn die Aufgaben den vierten Grad übertreffen. Denn zwei Kegelschnitte geben zwei Gleichungen, jede vom zweiten Grade, z. E. zwischen *u* und *t*. Ziehet man nun

nun aus der einen den Werth von u oder t und setzet ihn in die andere, so entstehet eine Gleichung vom vierten Grade, welche manchmal auf den dritten herabgesetzet werden kann, wie wir bei §. 8. gesehen haben.

II) Wenn man eine Gleichung hat, worinn nur eine unbekannte Größe vorhanden ist, so kann man eine zweite willkührlich einführen, um alsdann die Gleichung vermittelst zweier Kegelschnitte zu konstruiren. Z. E. Gesetzt, es solle diese Gleichung konstruiret werden, $t^3 + 3at^2 - a^2p = o$, so könnte man noch annehmen, es sey $t^2 = au$; so bekäme man $t^3 = aut$, folglich $aut + 3a^2u - a^2p = o$ oder $tu + 3au - ap = o$. Nun müste $tu + 3au - ap = o$ vermittelst der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, und $t^2 = au$ vermittelst der Parabel konstruiret werden. Beide krumme Linien würden einander schneiden, und den Werth von t geben.

III) Es ist aber nicht nöthig daß man sich bloß an den Gleichungen halte, die man anfänglich gefunden hat, sondern man kann sie verschiedentlich vorbereiten, um die Konstrukzion zu verändern. Z. E. Da wir zwischen a und b zwei mittlere Proporzionallinien suchten, so fanden wir $t^2 = au$, und $u^2 = bt$, welche Gleichungen vermittelst zweier Parabeln konstruiret wurden. Hier kann man die erste Gleichung $t^2 = au$ beibehalten, und sie vermittelst der Parabel konstruiren. Anstatt der zweiten aber kann man die Summe beider Gleichungen annehmen, nemlich $au + bt = u^2 + t^2$, welche Gleichung zum Zirkel gehöret, wenn man annimmt, daß t und u gegen einander senkrecht sind. Machet man $t - \frac{1}{2}b = y$ und $u - \frac{1}{2}a = x$, so bekömmt diese Gleichung folgende Gestalt $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - x^2$. Der Halbmesser ist also $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)}$, und die Lage des Mittelpunktes wird vermöge der Gleichungen $t - \frac{1}{2}b = y$, $u - \frac{1}{2}a = x$ bestimmet. Wo nun die Parabel und der Zirkel einander schneiden werden, da ist der verlangte Punkt, welcher t und u bestimmet.

Sechstes Hauptstück.

Von den krummen Linien überhaupt.

§. 1.

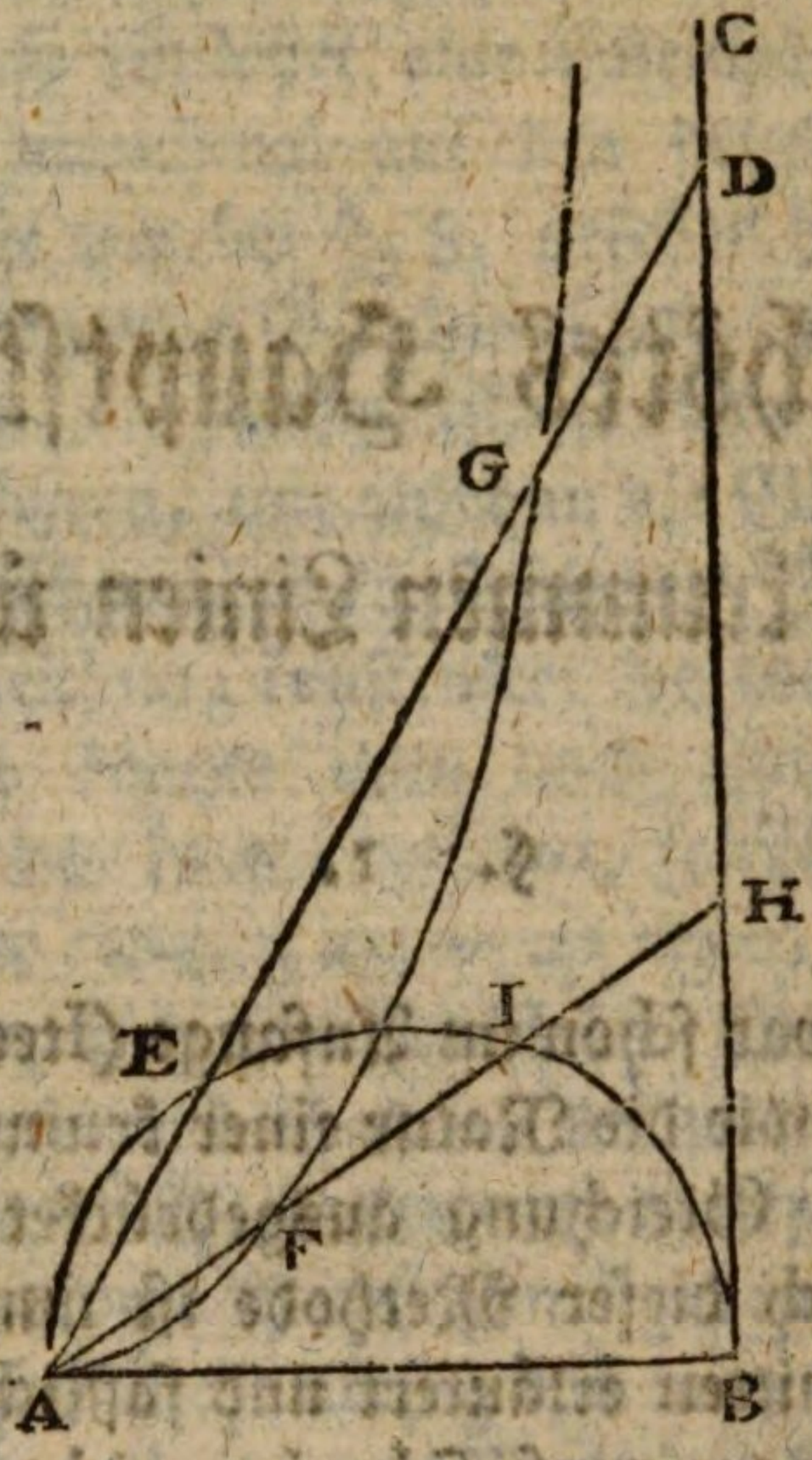
Wir haben zwar schon im Anfange (1tes Hauptst. §. 3) gezeiget, wie die Natur einer krummen Linie durch eine algebraische Gleichung ausgedrücket werden kann, und der Gebrauch dieser Methode ist umständlich genug bei den Kegelschnitten erläutert und faßlich gemacht worden. Ein Anfänger muß sich aber nicht einbilden, daß die Kegelschnitte allein fähig seyn durch Gleichungen vorgestellet zu werden. Es giebt sehr viele, ja unendlich viele andere Linien, deren Natur man auf eine solche Art vorstellen kann. Wir wollen hier noch ein Paar Beispiele anführen.

§. 2.

Es sey AEIB ein halber Zirkel über dem Durchmesser AB, und die gerade BC, welche ohne Ende nach C verlängert werden kann, sey senkrecht über AB, oder berühre den Zirkel in B. Aus A ziehe einige gerade Linien, als

(Siehe die folgende Figur.)

AH,



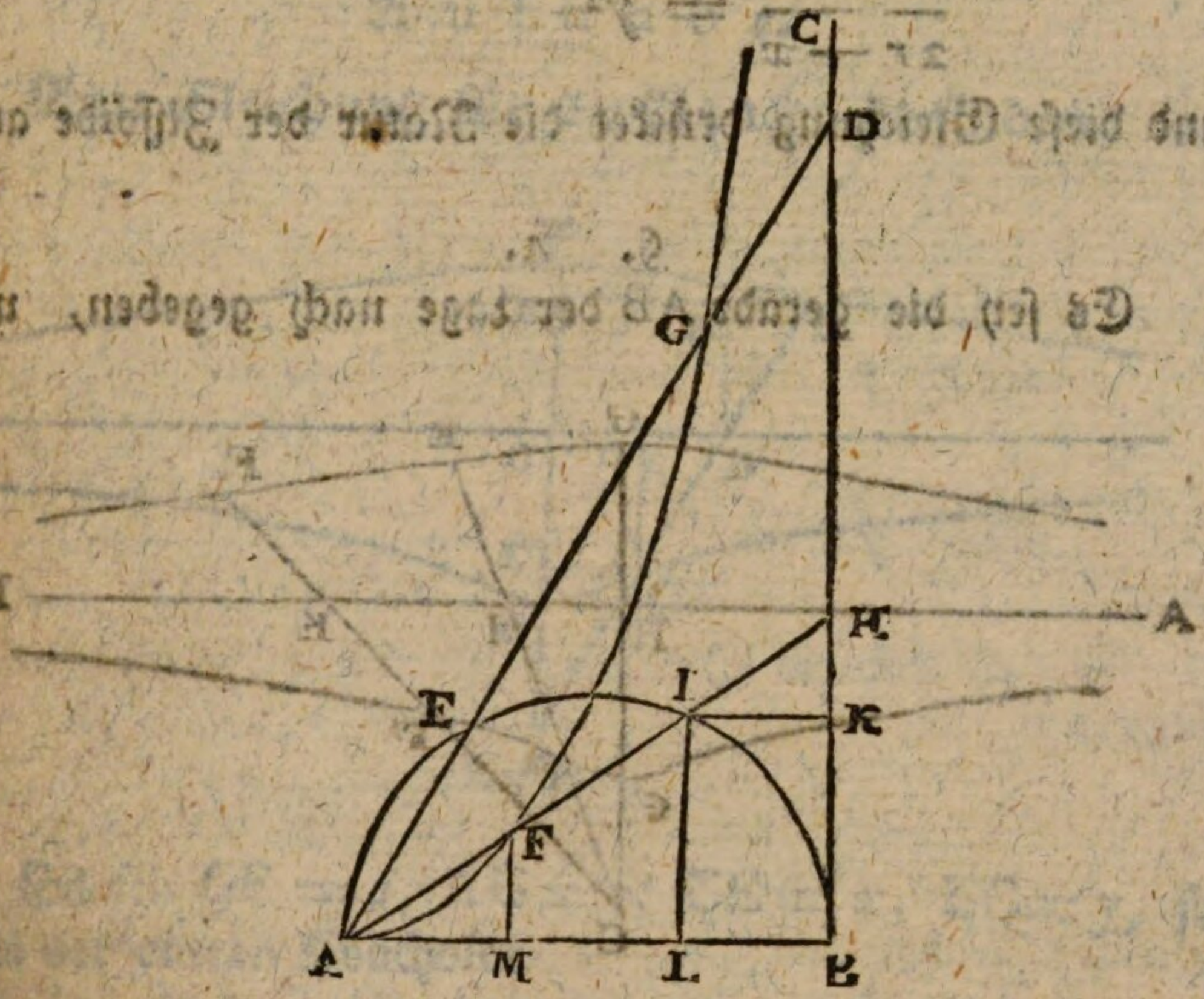
AH, AD, bis sie der BC begegnen. Die Theile AI, AE, von dem Punkte A bis zur Peripherie, trage rückwärts von H nach F, von D nach G, so daß der Theil der geraden Linie AI, AE der zwischen A und der Peripherie lieget, dem Theile gleich sey der zwischen der BC und den Punkten F, G lieget. Durch diese Punkte F, G, und viel mehrere dergleichen, ziehe eine krumme Linie AFG, so wird dieselbe eine Zissoïde genannt.

Man kann sich vorstellen, die Linie AH drehe sich um den Punkt A, und der Punkt F in derselben verändere seinen Ort so, daß er allemal so weit von dem Punkte H entfernet sey, wo AH die BC schneidet, als A von dem Punkte I entfernet ist, wo AH den Umkreis des Zirkels schneidet. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß BC die Asymptote der krummen Linie ist (Siehe I. H. §. 33. Zus. II.)

§. 3.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Zissoïde finden.



Auflösung. Es sey AB = $2r$, AM = x, MF = y. Der vorhergehenden Beschreibung zufolge ist AI = FH. Man nehme den gemeinen Theil FI ab, so bleibet AF = IH. Die Dreiecke AMF, IKH sind ähnlichgleich. Denn sie entstehen aus parallelen Linien, und es ist außerdem AF = IH. Folglich ist IK = AM, oder LB = AM. Da nun AM = x, so ist auch LB = x. Die Natur des Zirkels giebt LI = $\sqrt{(2rx - x^2)}$.

Die ähnlichen Dreiecke AMF, ALI, und die Natur des Zirkels geben demnach folgende Proporzionen und Gleichungen

AM, MF :: AL, LI

Nun ist AL, LI :: LI, LB

folglich AM, MF :: LI, LB

oder $x, y :: \sqrt{(2rx - x^2)}, x$

daher

daher ist $x^2 = y\sqrt{(2rx - x^2)}$

$$x^4 = y^2 \ (2rx - x^2)$$

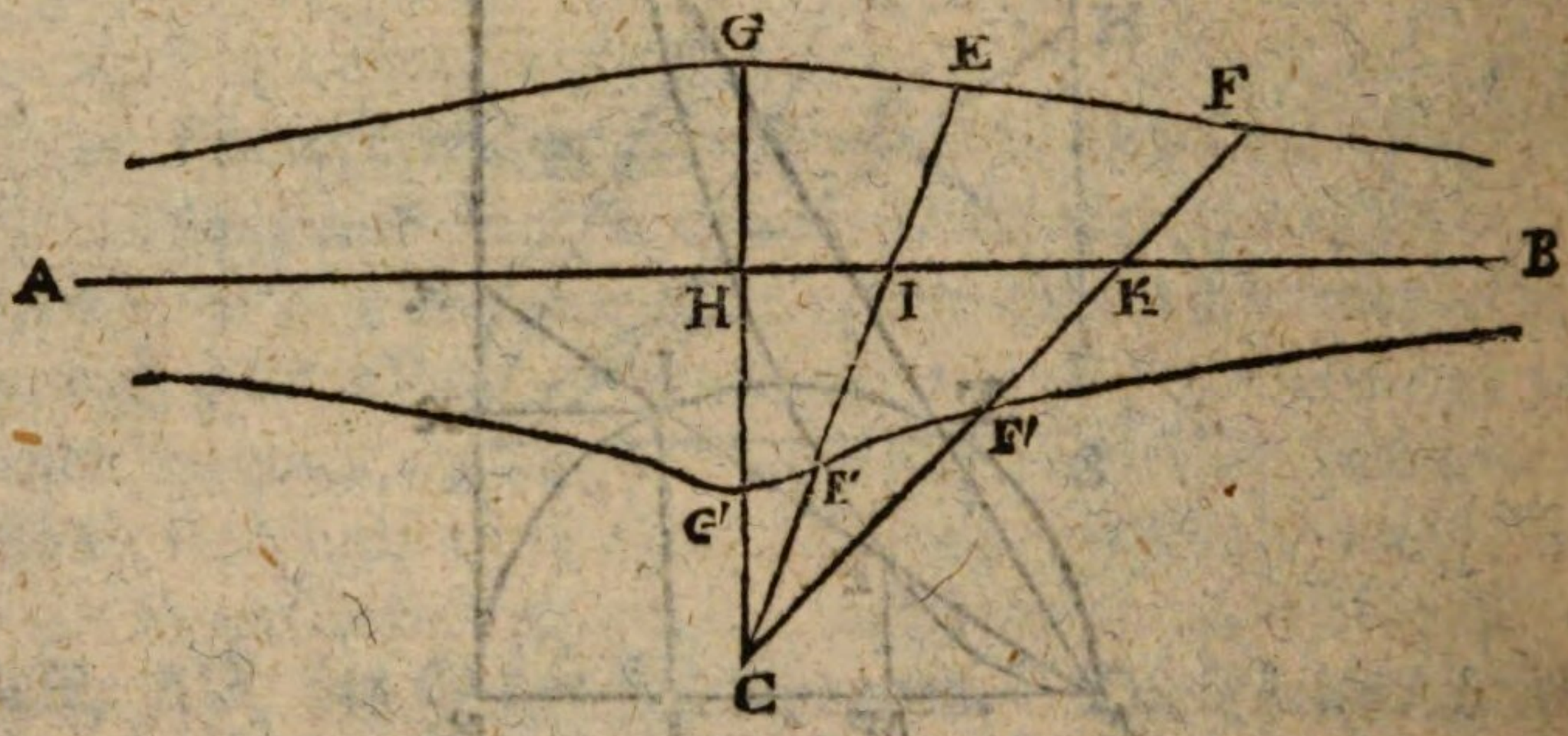
$$x^3 = y^2 \ (2r - x)$$

$$\frac{x^3}{2r - x} = y^2$$

und diese Gleichung drücket die Natur der Zissoïde aus.

§. 4.

Es sey die gerade AB der Lage nach gegeben, und



ausserhalb derselben der feste Punkt C. Aus C ziehe durch AB einige gerade Linien von unbestimmter Länge. Schneide von denselben gleiche Theile über oder unter AB ab, so daß $HG = IE = KF$ oder $HG' = IE' = KF'$. Durch die Punkte G, E, F oder G', E', F' ziehe eine krumme Linie GF oder G'F'. So heißt eine solche krumme Linie eine Konchoïde. Diejenige (GF), die in Betrachtung des Punktes C jenseit der Linie AB lieget, ist die obere Konchoïde, und die andere (G' F'), die in Betrachtung des Punktes C disseits der AB lieget, ist die untere Konchoïde.

Man kann sich auch vorstellen, die Linie CG bewege sich um den Punkt C, und in ihr bewege sich ein Punkt G oder G', so daß er von dem Orte, wo CG die AB schneidet, allemal gleich weit entfernet bleibe.

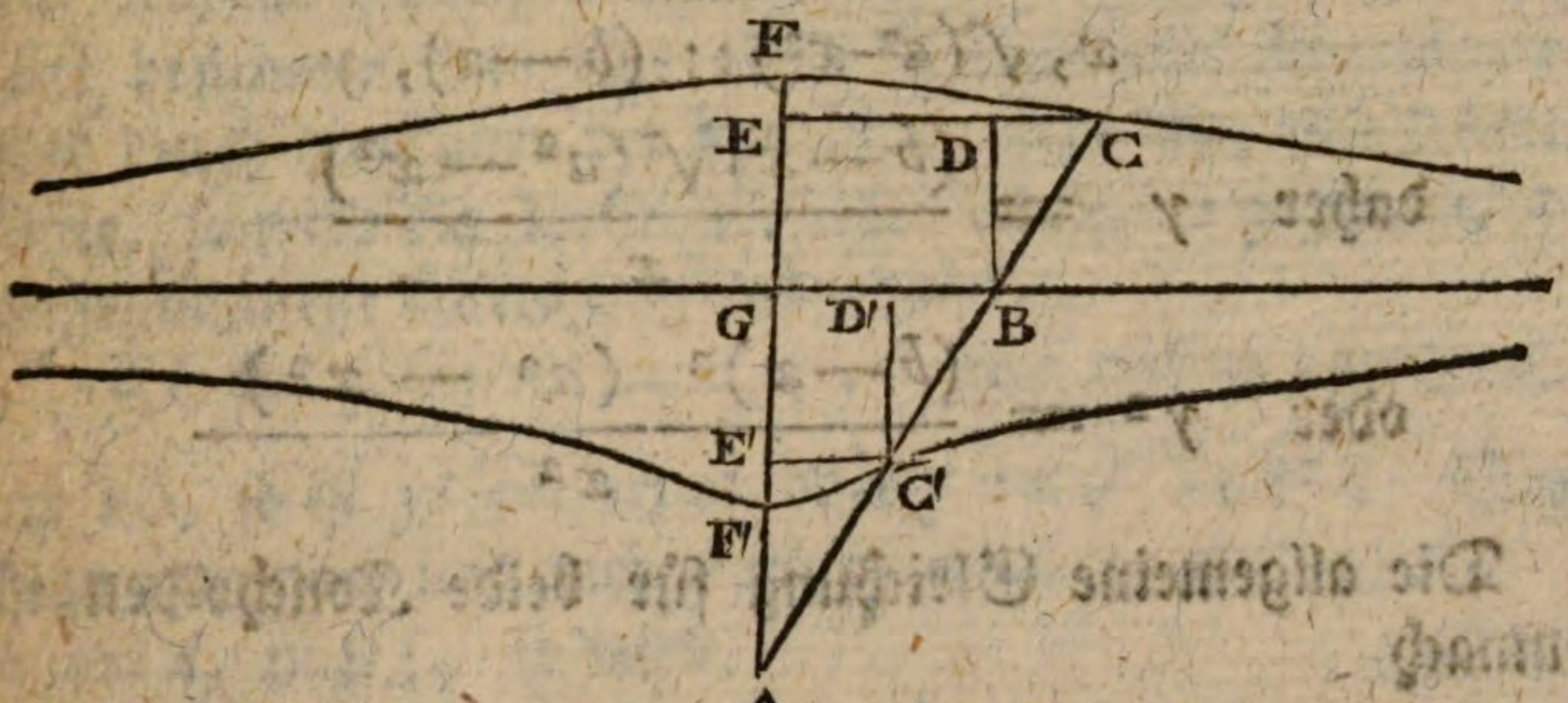
Zusatz.

Zusatz. Es ist leicht einzusehen, daß AB die Asymptote sowohl der oberen als der unteren Konchoïde ist.

§. 5.

Aufgabe.

Eine Gleichung für die Konchoïde finden.



Es sey $GF = a$, $AG = b$, $GE = x$, $EC = y$, so ist in der oberen Konchoïde

$$DC^2 = BC^2 - BD^2$$

oder $$DC^2 = GF^2 - GE^2$$

$$DC^2 = a^2 - x^2$$

$$DC = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Nun ist ferner

$$BD, DC :: AE, EC$$

$$x, \sqrt{(a^2-x^2)} :: (b+x), y$$

folglich $$y = \frac{(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

oder $$y^2 = \frac{(b+x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2}$$

In der unteren Konchoïde sey ebenfalls $GF' = a$, $AG = b$, $GE' = x$, $E'C' = y$, so ist auch hier

$$DB^2 = BC'^2 - C'D'^2$$
$$= F'G^2 - GE'^2$$
$$= a^2 - x^2$$

Ferner ist $C'D, DB :: AE', EC'$

$$x, \sqrt{(a^2-x^2)} :: (b-x), y$$

$$\text{daher } y = \frac{(b-x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

$$\text{oder } y^2 = \frac{(b-x)^2 (a^2-x^2)}{x^2}$$

Die allgemeine Gleichung für beide Konchoïden ist demnach

$$y^2 = \frac{(b \pm x)^2 (a^2-x^2)}{x^2}$$

wo das Zeichen + für die obere und das Zeichen — für die untere Konchoïde ist. Man merke, daß hier die Abzissen auf der AF genommen werden, welche auf GB senkrecht stehet, und daß der Ursprung derselben in G ist.

§. 6.

Diese Exempel nebst den Kegelschnitten mögen hinlänglich seyn, um zu zeigen, wie eine krumme Linie, deren mechanische Entstehung bekannt ist, durch eine algebraische Gleichung erkläret werden kann. Man kann aber auch ganz willkührlich und nach Belieben Gleichungen aufsetzen, und hernach dieselben durch Linien ausdrücken oder konstruiren. Dieses ist also zu verstehen.

Es sey gegeben oder willkührlich angenommen eine Gleichung zwischen zwei unbekannten oder veränderlichen Größen x und y. Man drücke die bekannten oder beständigen Größen durch Zahlen aus. Man gebe nach und

nach dem x verschiedene Werthe, und suche die dazu gehörigen Werthe des y in Zahlen. Man ziehe eine beliebige Direktrisse und nehme in derselben einen Punkt zum Ursprunge der Abzissen an. Die angenommenen Werthe von x trage man als Abzissen auf diese Direktrisse vom besagten Punkte aus. Am Ende jeder Abzisse errichte man eine senkrechte Linie, als Applikate, und mache sie dem zur Abzisse gehörigen Werthe von y gleich. Auf diese Art bestimme man eine grosse Menge von Koordinaten, und durch die Enden der Applikaten ziehe man eine krumme Linie, so wird die Natur derselben durch die gegebene oder angenommene Gleichung ausgedrücket.

Es sey z. E. $y^3 = ax^2$. Wir wollen annehmen $a = 10$, so ist $y^3 = 10x^2$ oder $y = \sqrt[3]{10x^2}$. Setzet man nun nach und nach $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, u. s. f., so wird

wenn $x = 0$, $y = \sqrt[3]{10 \times 0} = \sqrt[3]{0} = 0$

wenn $x = 1$, $y = \sqrt[3]{10 \times 1} = \sqrt[3]{10} = 2;154$

wenn $x = 2$, $y = \sqrt[3]{10 \times 4} = \sqrt[3]{40} = 3;420$

wenn $x = 3$, $y = \sqrt[3]{10 \times 9} = \sqrt[3]{90} = 4;482$

wenn $x = 4$, $y = \sqrt[3]{10 \times 16} = \sqrt[3]{160} = 5;429$

wenn $x = 5$, $y = \sqrt[3]{10 \times 25} = \sqrt[3]{250} = 6;300$

wenn $x = 6$, $y = \sqrt[3]{10 \times 36} = \sqrt[3]{360} = 7;114$

wenn $x = 7$, $y = \sqrt[3]{10 \times 49} = \sqrt[3]{490} = 7;884$

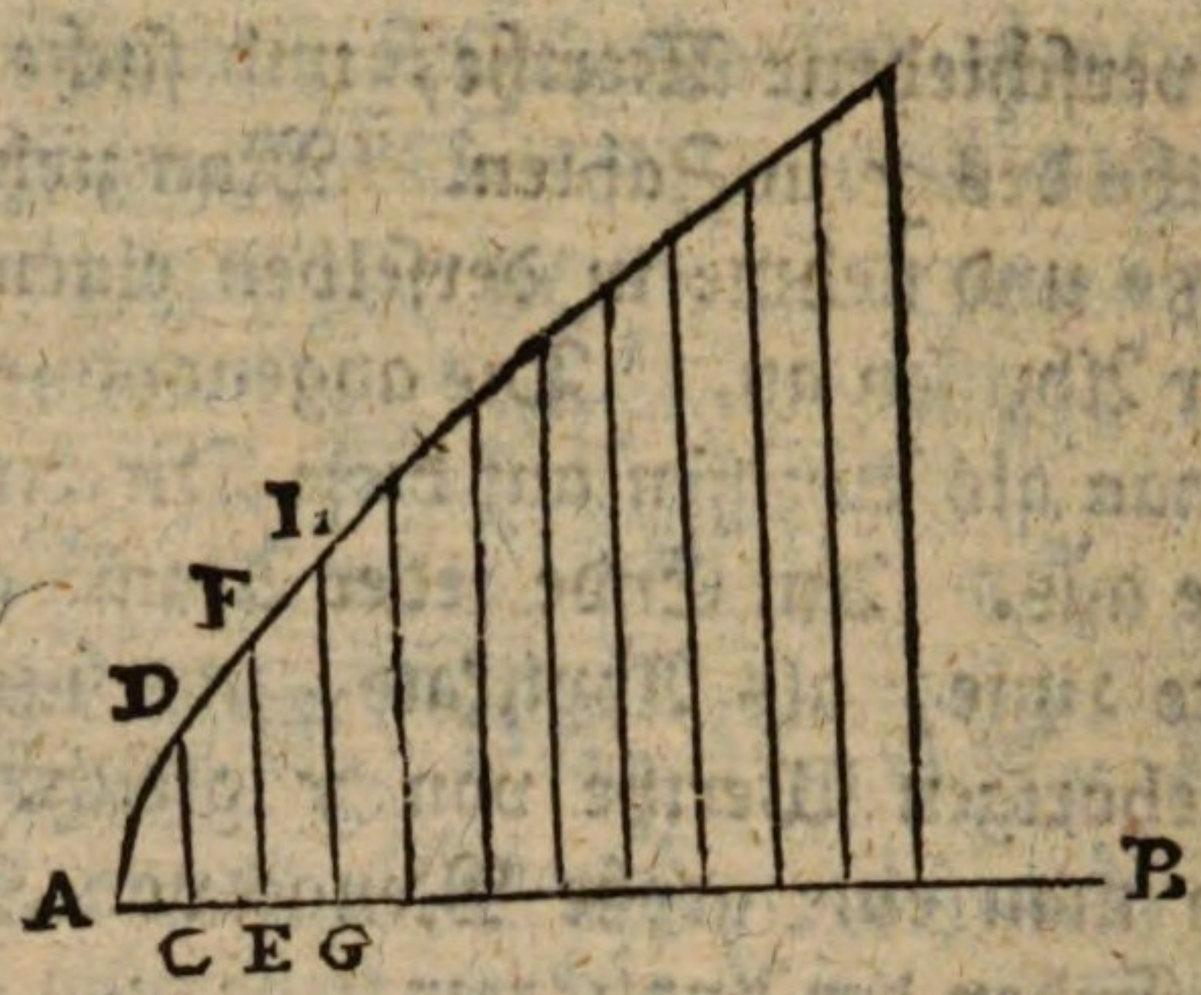
wenn $x = 8$, $y = \sqrt[3]{10 \times 64} = \sqrt[3]{640} = 8;618$

wenn $x = 9$, $y = \sqrt[3]{10 \times 81} = \sqrt[3]{810} = 9;322$

wenn $x = 10$, $y = \sqrt[3]{10 \times 100} = \sqrt[3]{1000} = 10;000$

wenn $x = 11$, $y = \sqrt[3]{10 \times 121} = \sqrt[3]{1210} = 10;654$

&c. &c. &c. &c.



Man nehme nun AB zur Direktrisse, und A zum Ursprunge der Abzissen. Man mache, nach einem willkührlichen Maaßstabe,

$$AC = 1,\ CD = 2;154$$
$$AE = 2,\ EF = 3;420$$
$$AG = 3,\ GH = 4;482 \quad \text{u. s. f.}$$

so wird die Linie, die durch A, D, F, H gehet, durch die Gleichung $y = \sqrt[3]{10x^2}$ oder $y^3 = 10x^2$ vorgestellet. Anstatt 10 kann nun der beständigen Größe a jeder andere bestimmte Werth beigeleget werden.

§. 7.

Linien, deren Beschaffenheit durch algebraische Gleichungen ausgedrücket werden kann, worin nichts als Produkte und Potenzen der veränderlichen Größen x und y vorkommen, werden **algebraische Linien** genannt. Es giebt deren unendlich viel, weil man so viel Gleichungen zwischen x und y ersinnen kann als man will. Sie werden in verschiedene **Ordnungen** eingetheilet, nachdem ihre Gleichungen beschaffen sind. Die Ordnung einer Gleichung wird aber gezählet nach der grösten Anzahl von veränderlichen Dimensionen oder Faktoren, die in einem Satze der Gleichung mit einander multiplizirt sind. Zum Exempel die Kegelschnitte, deren Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,\tfrac{1}{4}\left(\pm\tfrac{1}{4}a^2 \mp x^2\right) \text{ oder } y^2 = px \mp \frac{p}{a}\,x^2$$

ist,

ist, gehören zur zweiten Ordnung, weil in keinem Satze mehr als zwei veränderliche Dimensionen sind, nemlich yy und xx. Hingegen für die Zissoïde haben wir gefunden

(§. 3.) $$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

oder, wenn man den Bruch wegschaffet,

$$2ry^2 - xy^2 = x^3$$

Diese Linie gehöret also zur dritten Ordnung, weil die Sätze xyy und xxx drei veränderliche Dimensionen enthalten. In der Konchoïde ist (§. 5.)

$$y^2 = \frac{(b \pm x)^2 (a^2 - x^2)}{x^2}$$

oder $x^2y^2 = (b \pm x)^2 (a^2 - x^2)$

$$x^2 y^2 = a^2 b^2 \pm 2a^2 bx + (a^2 - b^2) x^2 \mp 2bx^3 - x^4$$

Hier sind in den Sätzen $xxyy$ und $xxxx$ vier veränderliche Dimensionen. Also gehöret diese Linie zur vierten Ordnung.

§. 8.

Die gerade Linie, wenn man sie in das allgemeine System der algebraischen Linien einführen will, gehöret zur ersten Ordnung, und ist die einzige in ihrer Art. Man hat schon in den vorigen Hauptstücken bei Gelegenheit gesehen (IV. H. §7.) wie jede Gleichung des ersten Grades vermittelst der geraden Linie konstruiret wird.

Zusatz. Die krummen Linien fangen also nur bey der zweiten Ordnung an. Daher man siehet, daß die $n$te Ordnung der algebraischen Linien überhaupt, nur die $(n-1)$te Ordnung der krummen Linien ist.

§. 9.

Auſſer den verſchiedenen Ordnungen der algebraiſchen Linien, hat man noch ihre verſchiedene Gattungen zu betrachten. Man rechnet nemlich zur ſelbigen Gattung alle Linien deren Gleichungen nur in den Exponenten der Potenzen verſchieden ſind, und man pfleget ſie unter einer gemeinen Gleichung zuſammen zu faſſen, worin die Exponenten unbeſtimmt ſind. Und, weil in den Gleichungen der algebraiſchen Linien, alle Sätze gleich viel Dimenſionen (beſtändige und veränderliche zuſammen genommen) zu haben pflegen, ſo muß auch dieſes bei den Gattungs-Gleichungen beobachtet werden. Wir wollen Exempel von den Kegelſchnitten nehmen.

I) $y^m = a^n x^{m-n}$ drücket die Gattung der Parabeln aus. Im zweiten Gliede machen beide Exponenten n und $m-n$ zuſammen m aus. Man mag alſo für m und n welche Zahlen man will, nehmen; ſo werden allemal beiderſeits gleich viel Dimenſionen ſeyn, oder die Summe der Exponenten wird in beiden Sätzen gleich ſeyn. Setzet man es ſey $m = 2$, $n = 1$, ſo wird $m - n = 1$, und man bekömmt $y^2 = ax$, welches die gemeine Parabel iſt. Es ſey $m = 3$ und $n = 2$, oder $m = 3$ und $n = 1$, ſo iſt $y^3 = a^2 x$ oder $y^3 = ax^2$, welches Parabeln von der dritten Ordnung oder kubiſche Parabeln ſind.

II) $y^m = a^n x^{m-n} - x^m$ drücket die Gattung der Zirkel aus. Iſt $m = 2$, $n = 1$, ſo hat man für den gemeinen Zirkel $y^2 = ax - x^2$. Iſt $m = 3$, $n = 1$, oder $m = 3$, $n = 2$, ſo kömmt $y^3 = ax^2 - x^3$ oder $y^3 = a^2 x - x^3$, welches Zirkel von der dritten Ordnung oder kubiſche Zirkel ſind. Man merke aber, daß ſolche Zirkel von höheren Ordnungen nicht die runde Figur und andere Eigenſchaften des gemeinen Zirkels beſitzen.

III) $y^m = p^n x^{m-n} - \left(\frac{p}{a}\right) x^m$, ist eine Gleichung für die Gattung der Ellipsen. Wenn $m = 2$, $n = 1$, so bekömmt man für die gemeine Ellipse $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$. Man merke, daß der Bruch $\frac{p}{a}$ keine Dimension hat, sondern nur ein Verhältniß oder eine Zahl vorstellet.

IV) $y^m = p^n x^{m-n} + \frac{p}{a} x^m$ stellet die Gattung der Hyperbeln vor. Wenn $m = 2$, $n = 1$, so ist $y^2 = px + \frac{p}{a} x^2$ für die gemeine Hyperbel.

V) $x^n y^m = a^{m+n}$ ist die Gleichung für die Gattung der Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten. Wenn $m = 1$ und $n = 1$, so ist $xy = a^2$, für die gemeine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

§. 10.

Eben so wie man in Rechnungen den Halbmesser des Zirkels $= 1$ setzet, so pfleget man auch in den Gleichungen der krummen Linien oft den Parameter, oder überhaupt eine beständige Größe $= 1$ zu setzen, wodurch dann die algebraischen oder arithmetischen Verrichtungen in manchen Fällen um ein merkliches erleichtert werden.

Zum Exempel diese Gleichung:

$$y^m = a^{m-n} x^n$$

drücket die Parabel aller Ordnungen aus, und ist im Grunde einerlei mit der kurz vorher angegebenen $y^m = a^n x^{m-n}$. Nimmt man nun an $a = 1$, so wird

$$y^m = 1^{m-n} x^n$$

oder, weil $1^{m-n} = 1$, so ist

$$y^m = x^n$$

oder $y = x^{\frac{n}{m}}$

welche Gleichung ebenfalls für alle Parabeln gilt, wenn der Parameter 1 ist. Will man die Gleichung wieder vollständig machen, so darf man nur die Einheit vor x schreiben, und dieser Einheit den Exponenten geben, der herauskömmt, wenn man den Exponenten des x vom Exponenten des y abziehet, nemlich $y^m = x^n$ giebt sogleich $y^m = 1^{m-n} x^n$, oder aus $y = x^{\frac{n}{m}}$ entstehet $y = 1^{1-\frac{m}{n}} x^{\frac{n}{m}}$

Die Gleichung für alle Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten war $x^n y^m = a^{m+n}$

Ist nun $a = 1$, so wird

$$x^n y^m = 1$$

$$y^m = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

$$y = x^{-\frac{n}{m}}$$

Will man diese letzte Gleichung wiederum ergänzen, so schreibe man $y = 1^{1+\frac{n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$, Hier machen die Exponenten von 1 und von x zusammen 1, als den Exponenten von y.

Zusatz. Da in den Parabeln, wenn der Parameter $= 1$, gefunden worden, $y = x^{\frac{n}{m}}$, und in den Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten $y = x^{-\frac{n}{m}}$ wenn nemlich die bestän-

beſtändige Gröſſe = 1, ſo kann man beiderlei Linien unter der folgenden Gleichung begreifen,

$$y = x^{\pm\frac{n}{m}}$$

oder $y^m = x^{\pm n}$

welche Gleichung alſo mit dem Zeichen + eine Parabel, und mit — eine Hyperbel vorſtellet.

§. 11.

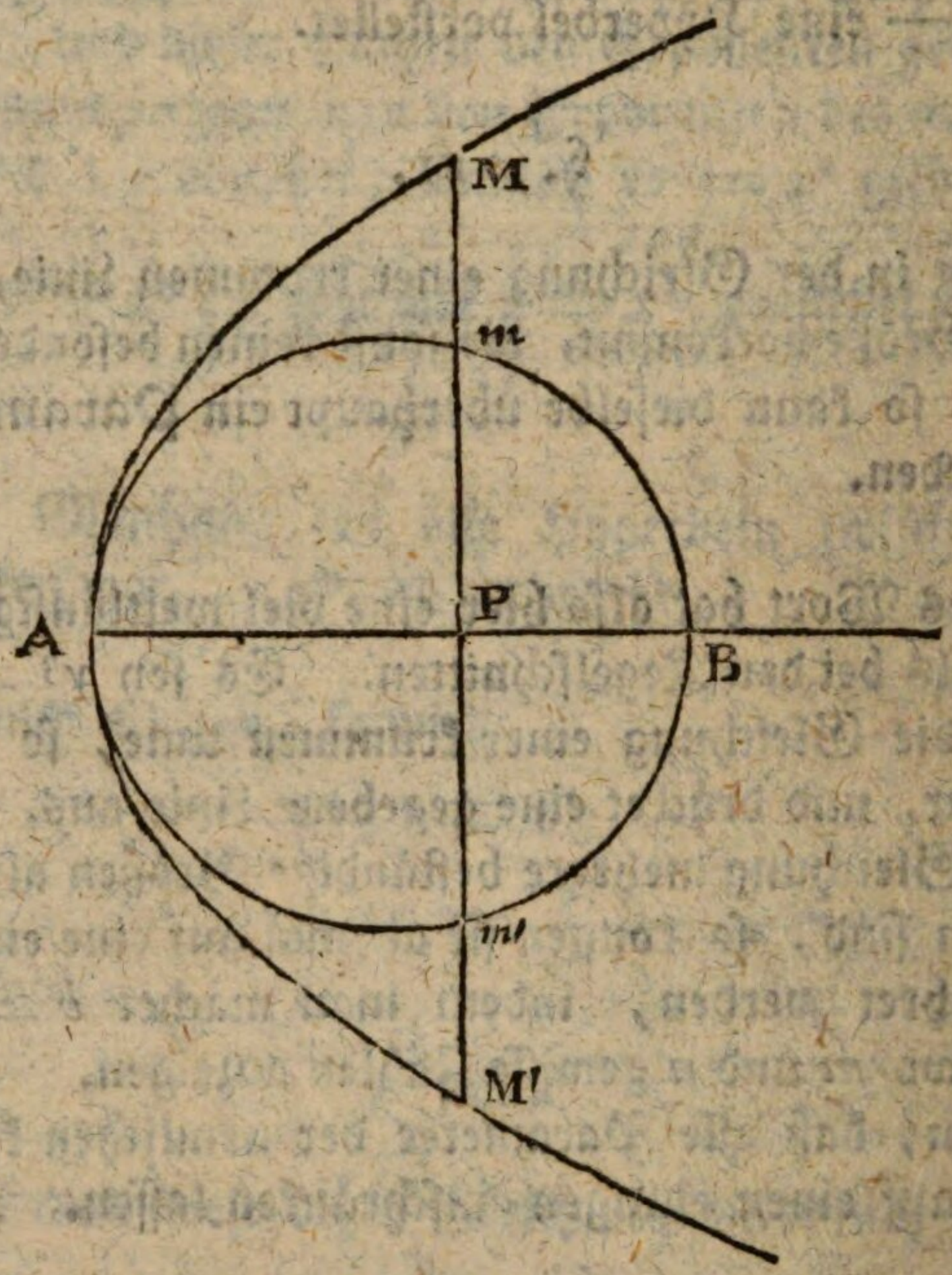
Wenn in der Gleichung einer krummen Linie, eine beſtändige Gröſſe vorkömmt, die ſonſt keinen beſonderen Namen hat, ſo kann dieſelbe überhaupt ein Parameter genannt werden.

Dieſes Wort hat alſo hier eine viel weitläufigere Bedeutung als bei den Kegelſchnitten. Es ſey $y^3 = axy + 4x^3$ die Gleichuug einer krummen Linie, ſo iſt a der Parameter, und drücket eine gegebene Linie aus. Wenn in einer Gleichung mehrere beſtändige Gröſſen als a, b, c vorhanden ſind, ſo können ſie allemal auf eine einzige zurück geführet werden, indem man machet $b = ma$, $c = na$, wo m und n gewiſſe Zahlen anzeigen. Hieraus ſiehet man, daß alle Parameter der nemlichen krummen Linie ſich auf einen einzigen einſchränken laſſen.

§. 12.

Wenn eine Gleichung mehr als eine Wurzel hat, das iſt, wenn jeder Werth von x mehr als einen Werth von y giebt, ſo hat die krumme Linie mehrere Zweige, wie wir ſchon an den Kegelſchnitten geſehen haben. Es kann aber auch eine Gleichung ein Syſtem oder eine Sammlung mehrerer Linien vorſtellen, die auf der nemlichen Ebne beſchrieben ſind, und dieſes geſchiehet, wenn die Gleichung

ein Produkt mehrerer einfacher Gleichungen ist. Wir haben schon gesehen, (IV. H. §. 7) daß eine Gleichung des zweiten Grades, wenn sie in zwei Gleichungen des ersten Grades aufgelöset werden kann, nicht durch einen Kegelschnitt, sondern dnrch zwei gerade Linien konstruiret werden muß. Wir wollen hier noch ein Beispiel anführen.



Es sey AB $= a$ der Diameter eines Zirkels, es sey AP $= x$, P$m = y$, so ist $y^2 = ax - x^2$. Es sey auch a der Parameter einer Parabel, und AB ein Theil der Axe, es sey AP $= x$, PM $= y$, so ist $y^2 = ax$. Man hat hier zwei Gleichungen nemlich

$$y^2 + x^2 - ax = 0$$

und $y^2 - ax = 0$

Man

Man multiplizire beide, so kömmt

$$y^4 + x^2 y^2 - 2axy^2 - ax^3 + a^2 x^2 = 0$$

Diese Gleichung ist nun vom vierten Grade, und y hat in derselben vier Werthe, nemlich

$$y = + \sqrt{(ax - x^2)}$$
$$y = - \sqrt{(ax - x^2)}$$
$$y = + \sqrt{ax}$$
$$y = - \sqrt{ax}$$

sie scheinet also eine Linie von der vierten Ordnung und mit vier Zweigen anzudeuten. Dennoch aber stellet sie nichts anders als einen Zirkel und eine Parabel vor, wie man in der Figur siehet. Die beiden Applikaten $+\sqrt{(ax - x^2)}$ und $-\sqrt{(ax - x^2)}$ das ist Pm und Pm' gehören zum Zirkel, hingegegen $+\sqrt{ax}$ und $-\sqrt{ax}$, das ist PM und PM′ gehören zur Parabel.

Da also die einzelnen Linien, woraus das System besteht, schon für sich bekannt sind, und besonders betrachtet werden können, so wäre es überflüßig ihre Zusammensetzung als eine neue krumme Linie zu betrachten.

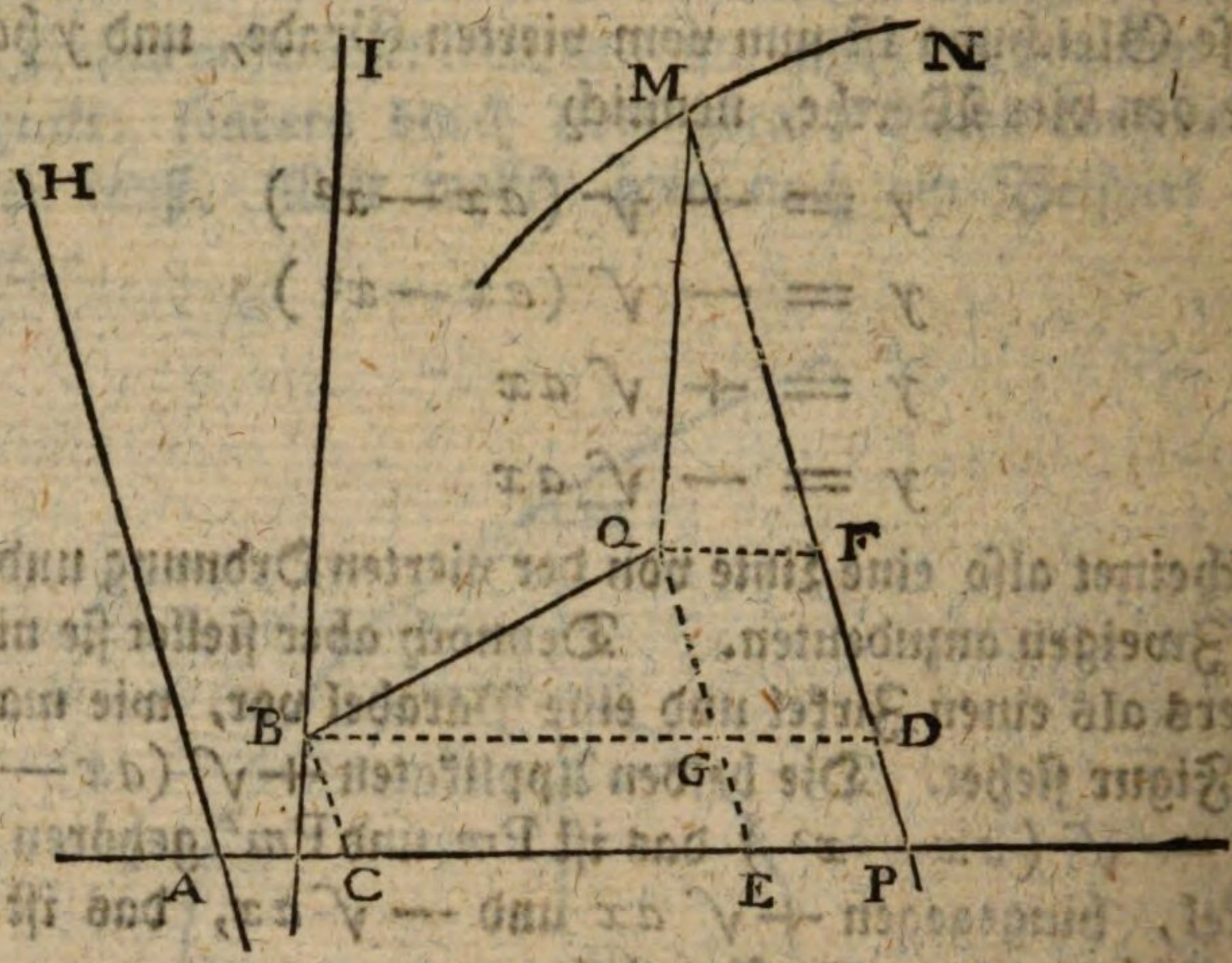
Hingegen wenn eine Gleichung so beschaffen ist, daß sie sich nicht in einzelne razionale Gleichungen auflösen läßt, so müssen die verschiedenen Zweige derselben als unzertrennlich betrachtet werden, und bilden daher eine einzelne krumme Linie.

§. 13.

Wir haben schon bei den Kegelschnitten gesehen, daß die Gleichung einer krummen Linie oft eine ganz andere Gestalt bekömmt, wenn man andere Abzissen und andere Applikaten annimmt. Wir wollen hier auf eine allgemeine

Art

Art zeigen, wie die Gleichung verändert werden muß, wenn andere Koordinaten angenommen werden.



Es sey MN eine algebraische Linie, deren Natur durch irgend eine Gleichung ausgedrücket ist, welche das Verhältniß der Koordinaten AP, PM, oder x und y vorstellet. AH ist eine gerade Linie die durch den Ursprung A der Abzissen gehet und mit welcher die Applikaten parallel sind.

Es werde nun die Gleichung für zwei andere Koordinaten BQ und QM (z und u) gesuchet, die zum nemlichen Punkte M der krummen Linien gehören. BI gehet durch den Ursprung B der neuen Abzissen, und ist die Linie mit welcher die Applikaten parallel seyn sollen.

Ziehe BC und QE mit AH parallel. Ziehe ebenfalls BD und QF mit AP parallel. Es sey $AC = m$, $BC = n$. Diese Linien sind als bekannt anzusehen, weil vorausgesetzet wird, daß der Punkt B gegeben ist. Ferner sind alle Winkel der Dreiecke BQG, MQF gegeben, folglich ist auch das Verhältniß ihrer Seiten bekannt. Es sey demnach BQ zu BG wie 1 zu p, so ist $BG = p \times BQ = pz$.

Es

Es sey BQ zu QG wie 1 zu q, so ist $QG = qz$. Es sey QM, QF :: 1, r, so ist $QF = ru$. Es sey QM, MF :: 1, s, so ist $MF = su$. Nun ist

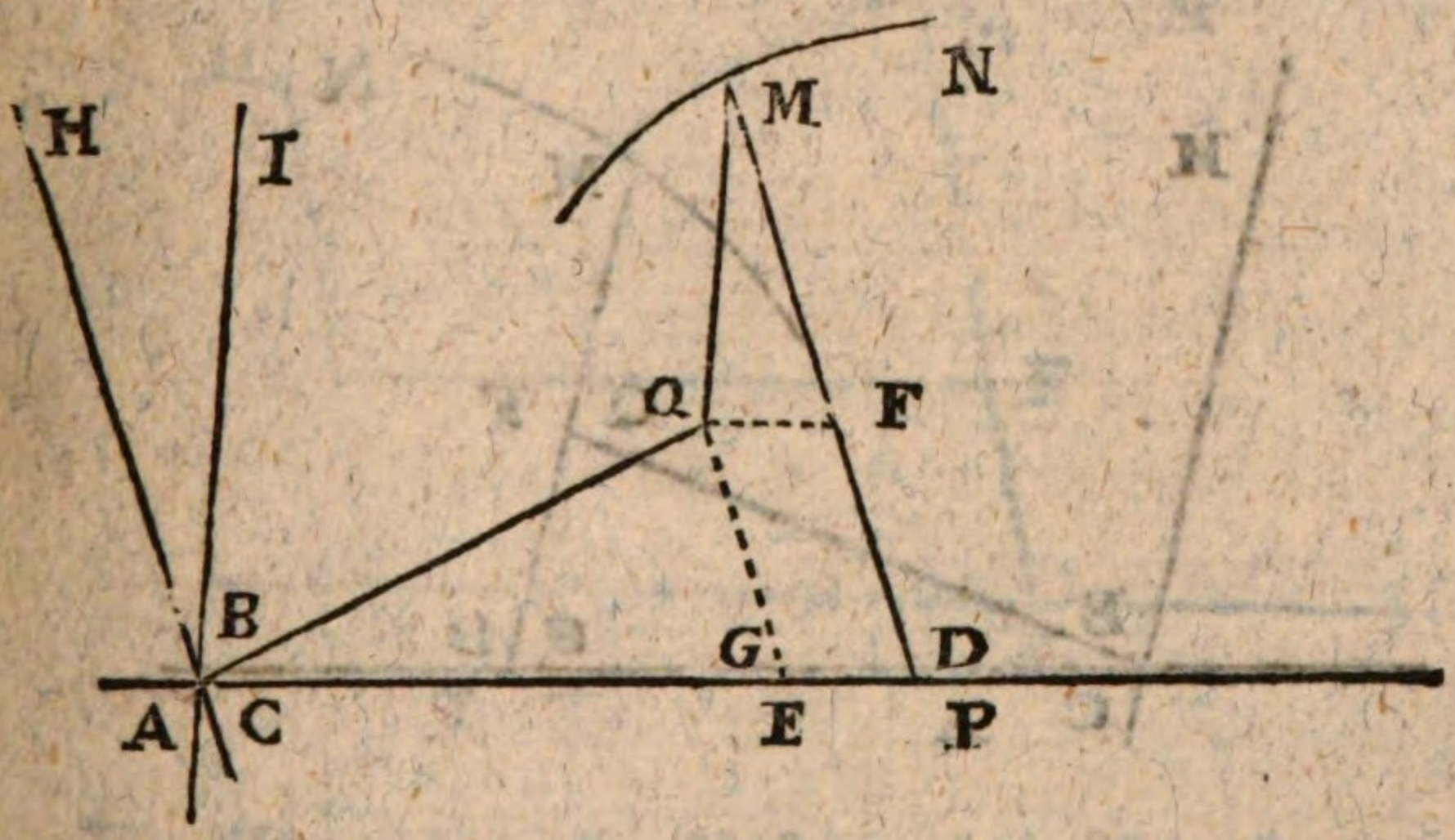
$$AP = AC + CE + EP$$
$$AP = AC + BG + QF$$
$$x = m + pz + ru$$

Ferner ist

$$PM = PD + DF + FM$$
$$PM = BC + QG + MF$$
$$y = n + qz + su$$

Es kann zwar geschehen, daß vermöge der Lage der Punkte A und B, und der Linien AP, AH, BQ, BI einige der Größen m, n, p, q, r, s, negativ werden. Dem sey aber wie man will, so ist es allemal unstreitig, daß man nur in der Gleichung zwischen x und y, anstatt x dessen neuen Werth $m + pz + ru$, und anstatt y dessen neuen Werth $n + qz + su$ zu substituiren hat, um die Gleichung zwischen z und u zu bekommen, die folglich die Natur der nemlichen krummen Linie ausdrücket.

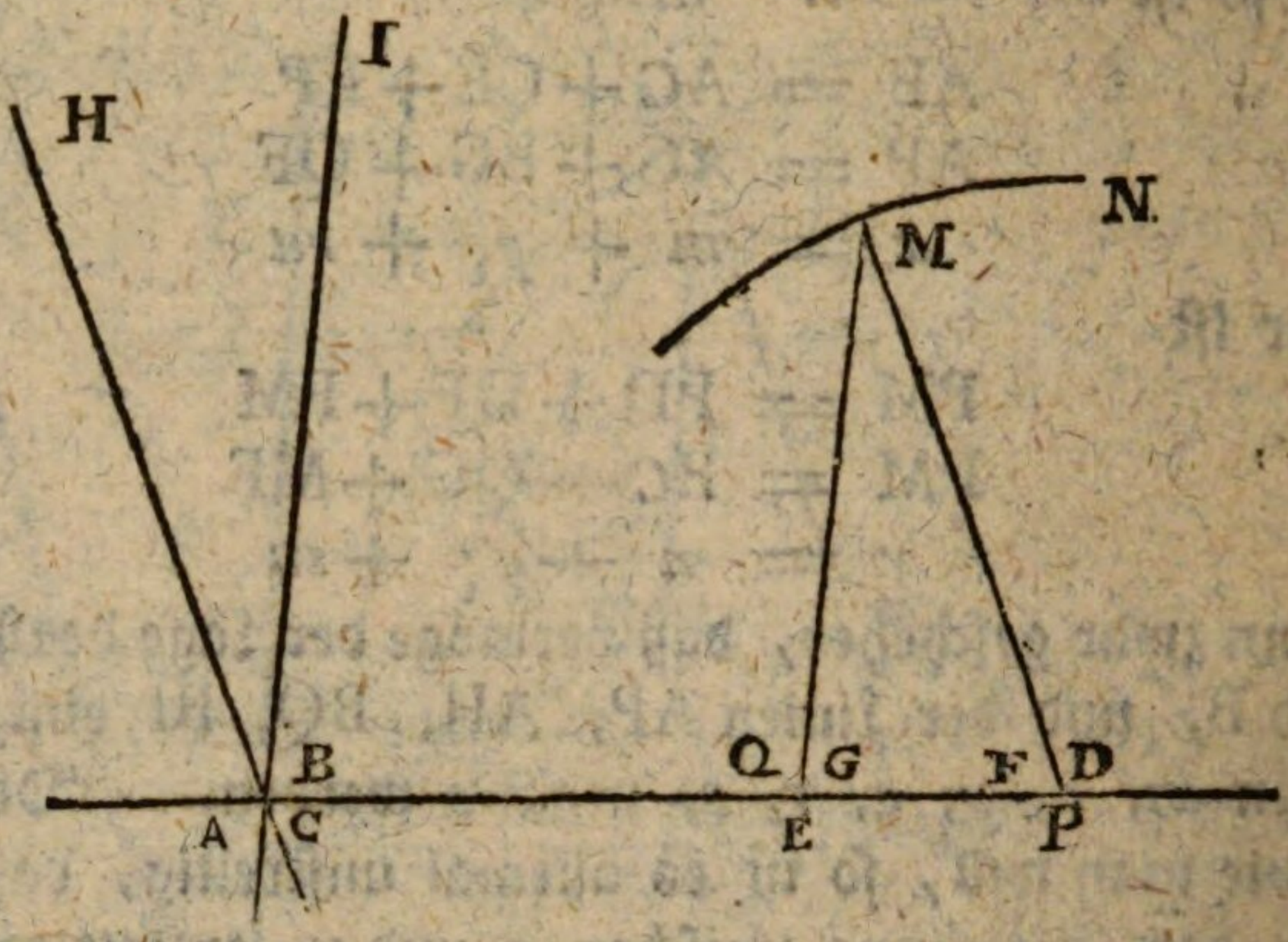
Diese allgemeine Formel begreifet alle einzelne Fälle.



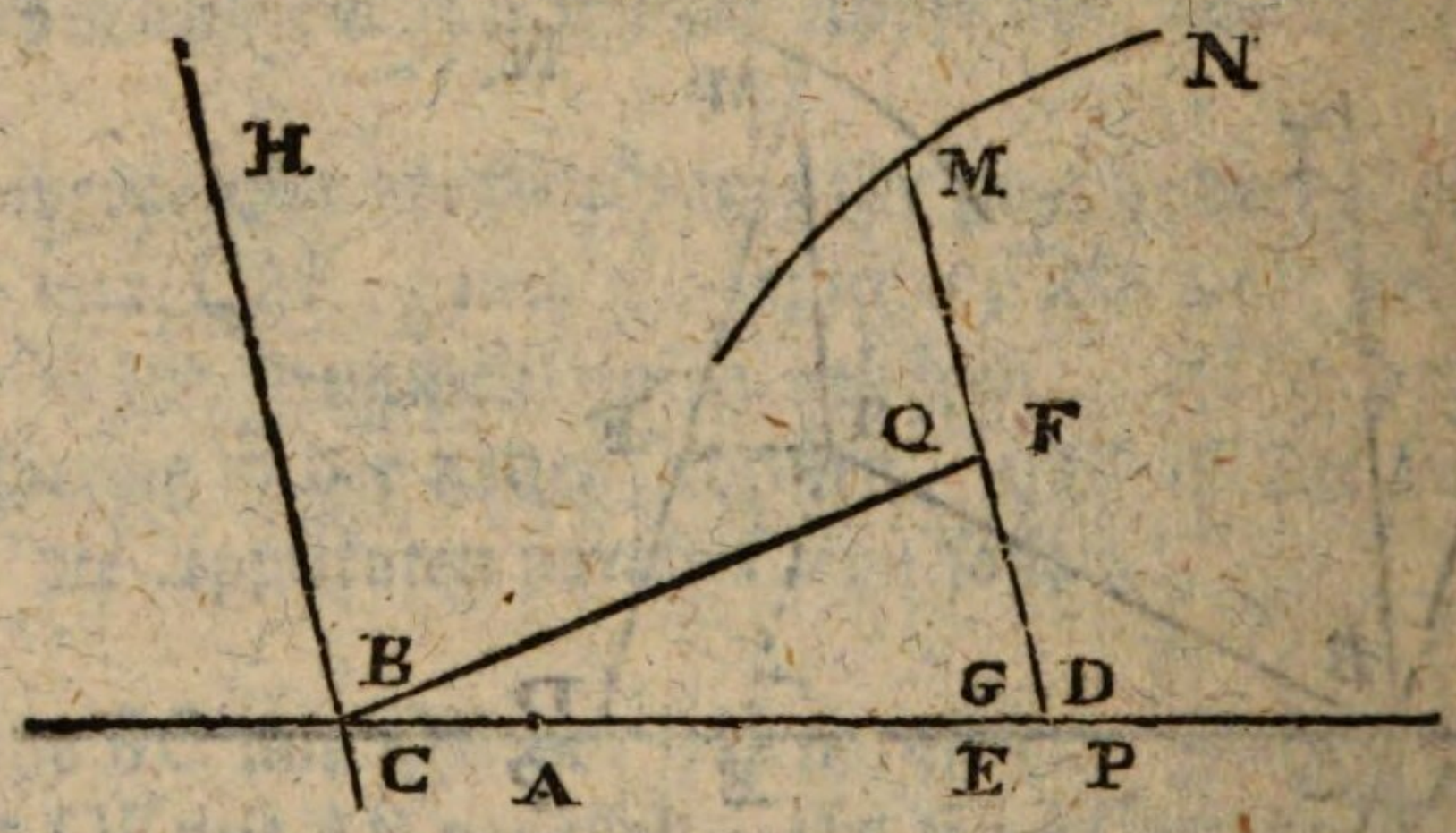
1) Gesetzt, es sollen die Abzissen z und x aus dem nemlichen Punkte entspringen, so darf man nur annehmen, daß der Punkt B auf den Punkt A falle. Dann verschwinden AC und BC, oder es wird $m = o$,

und

und $n = o$. Folglich bleibet noch $x = pz + ru$, und $y = qz + su$.

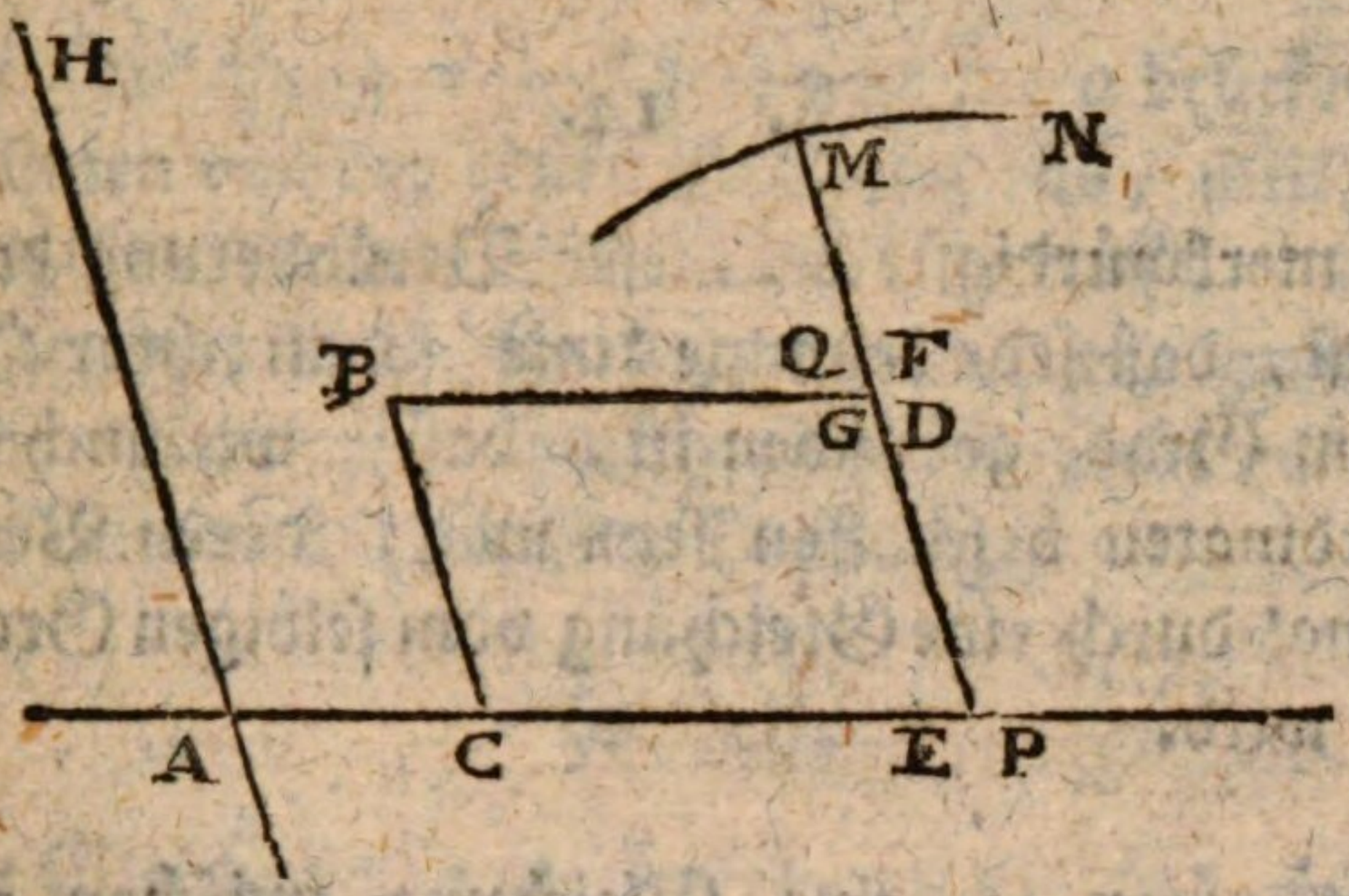


II) Wenn die Lage und der Ursprung der Abzissen unverändert bleiben, und nur die Lage der Applikaten geändert werden soll, so wird nicht nur $m = o$ und $n = o$, sondern das Dreieck BQG fällt zusammen in eine gerade Linie BQ, BG oder pz wird zu BQ oder z, und QG oder qz wird null. Folglich ist in diesem Falle $x = z + ru$ und $u = su$.

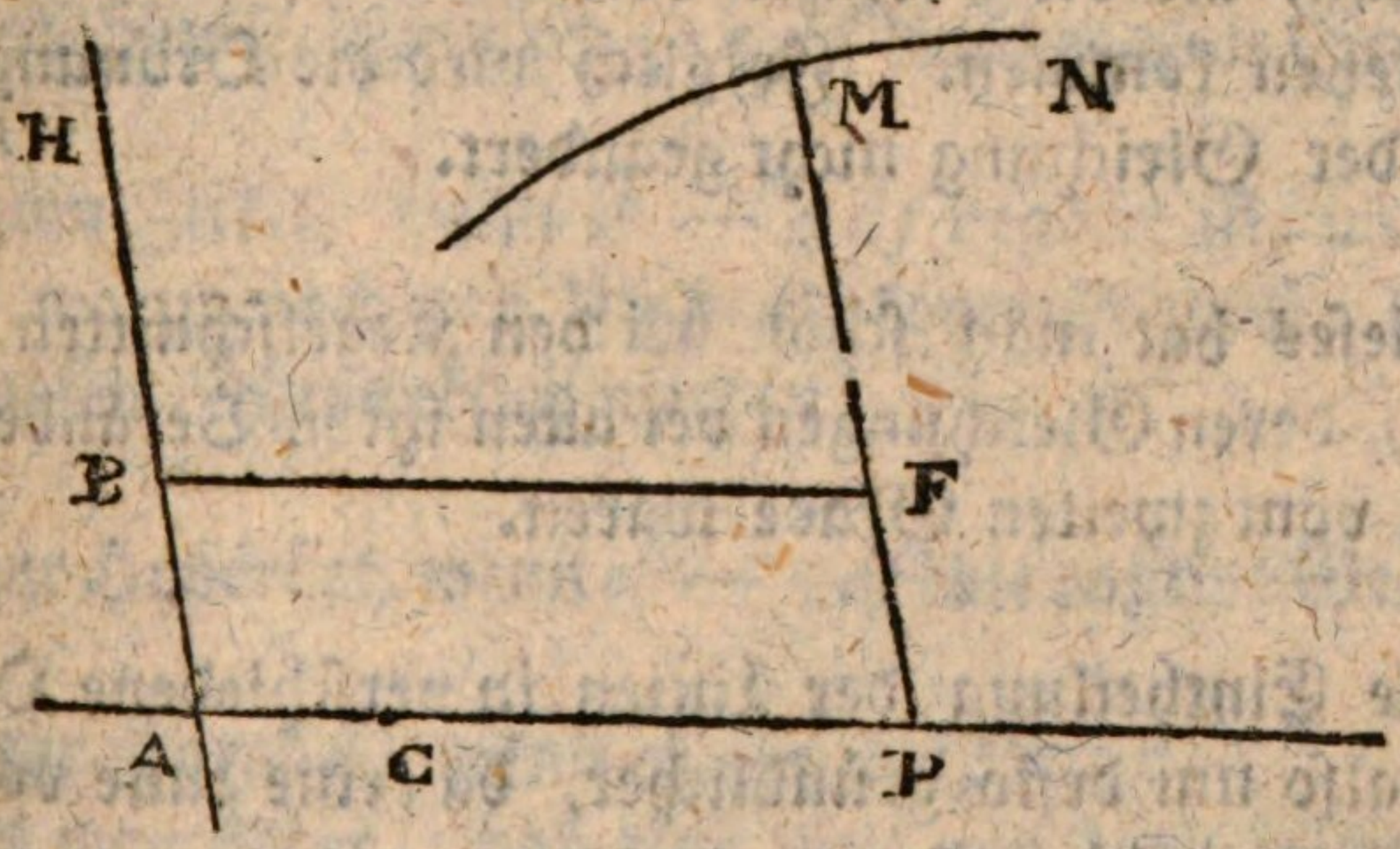


III) Wenn nur die Lage der Abzissen verändert werden soll, so wird BC oder $n = o$, und $QF = ru = o$, FM oder su wird einerlei mit $QM = u$, folglich ist $x = m + pz$, und $y = qz + u$. Und wenn die alten und neuen Abzissen

ziſſen im Punkte B anfangen, ſo iſt auch AC oder $m = o$, folglich $x = pz$, und $y = qz + u$,



IV) Sollen die neuen Koordinaten mit den alten parallel bleiben, und nur der Urſprung B verändert werden, ſo verſchwinden die Dreiecke BGQ, MFQ; BG oder pz wird zu BQ oder z, MF oder su wird zu MQ oder u. Hingegen wird QF oder $ru = o$, und GQ oder $qz = o$. Folglich wird $x = m \pm z$, und $y = n \pm u$



V) Wenn bloß der Urſprung der Abziſſen aus A in C in derſelbigen Direktrize verſetzet wird, und die Applikaten PM unverändert bleiben, ſo wird nur allein $x = m \pm z$. Und wenn bloß eine neue Direktrize mit der alten parallel

gezo-

gezogen wird, so daß die Abzissen AP oder BF unverändert bleiben, so wird nur $y = n \pm u$.

§. 14.

Das merkwürdigste bei dieser Veränderung der Gleichungen ist, daß jede krumme Linie so an ihrer Ordnung oder ihrem Grade gebunden ist, daß, wie auch die Lage der Koordinaten beschaffen seyn mag, deren Verhältniß doch allemal durch eine Gleichung vom selbigen Grade ausgedrücket wird.

Denn, wenn ich eine Gleichung zwischen x und y habe, und darin $m + pz + ru$ anstatt x, und $n + qz + su$ anstatt y substituire, so steiget die neue Gleichung bis zur nemlichen Anzahl von Dimensionen in z und u als die alte in x und y. Nemlich, da $m + pz + ru$ und $n + qz + su$ eben so, wie x und y nur von der ersten Dignität sind, so werden auch alle Potenzen von $m + pz + ru$ und $n + qz + su$ von der selbigen Ordnung seyn, als die Potenzen von x und y, an deren Stelle sie zu stehen kommen. Folglich wird die Ordnung, oder Grad der Gleichung nicht geändert.

Dieses hat man schon bei den Kegelschnitten merken können, deren Gleichungen bei allen ihren Veränderungen allemal vom zweiten Grade waren.

Die Eintheilung der Linien in verschiedene Ordnungen ist also um desto gründlicher, da keine Linie von ihrer Ordnung abweichen kann.

§. 15.

Alle Linien von einerlei Ordnung können durch eine allgemeine Gleichung vorgestellet werden, und die verschiedenen

denen Arten derselben hängen ab von den verschiedenen unveränderlichen Koeffizienten der allgemeinen Gleichung.

Die Gleichung $a + by + cx = o$ drücket die Natur der Linien von der ersten Ordnung aus, weil sie keinen Satz enthält, der den ersten Grad übertreffe. Sie gehöret zur geraden Linie (§. 8.), und da alle gerade Linien einander vollkommen ähnlich sind, so giebt es eigentlich nur eine Linie von der ersten Ordnung.

§. 16.

Die Gleichung $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = o$ stellet alle mögliche Linien von der zweiten Ordnung vor, weil kein Satz darin vorhanden ist, der den zweiten Grad übertreffe.

Diese allgemeine Gleichung des zweiten Grades gehöret nun entweder zur Ellipse, oder zum Zirkel, oder zur Hyperbel, oder zur Parabel, nemlich (IV. H. §. 23)

1) zur Ellipse, wenn $e^2 - 4df$ eine negative Größe ist;

2) zum Zirkel, wenn $e^2 - 4df$ negativ ist, und dabei $d = f$, worzu noch der Umstand kommen muß, daß die Koordinaten rechtwinklich werden;

3) zur Hyperbel, wenn $e^2 - 4df$ eine positive Größe ist;

4) zur Parabel, wenn $e^2 - 4df = o$.

Woraus man siehet, daß eine Linie von der zweiten Ordnung allemal einer der Kegelschnitte ist, und daß es folglich nicht mehr als drei Arten von Linien der zweiten Ordnung gebe, die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel, wenn man den Zirkel unter den Ellipsen mitrechnet.

§. 17.

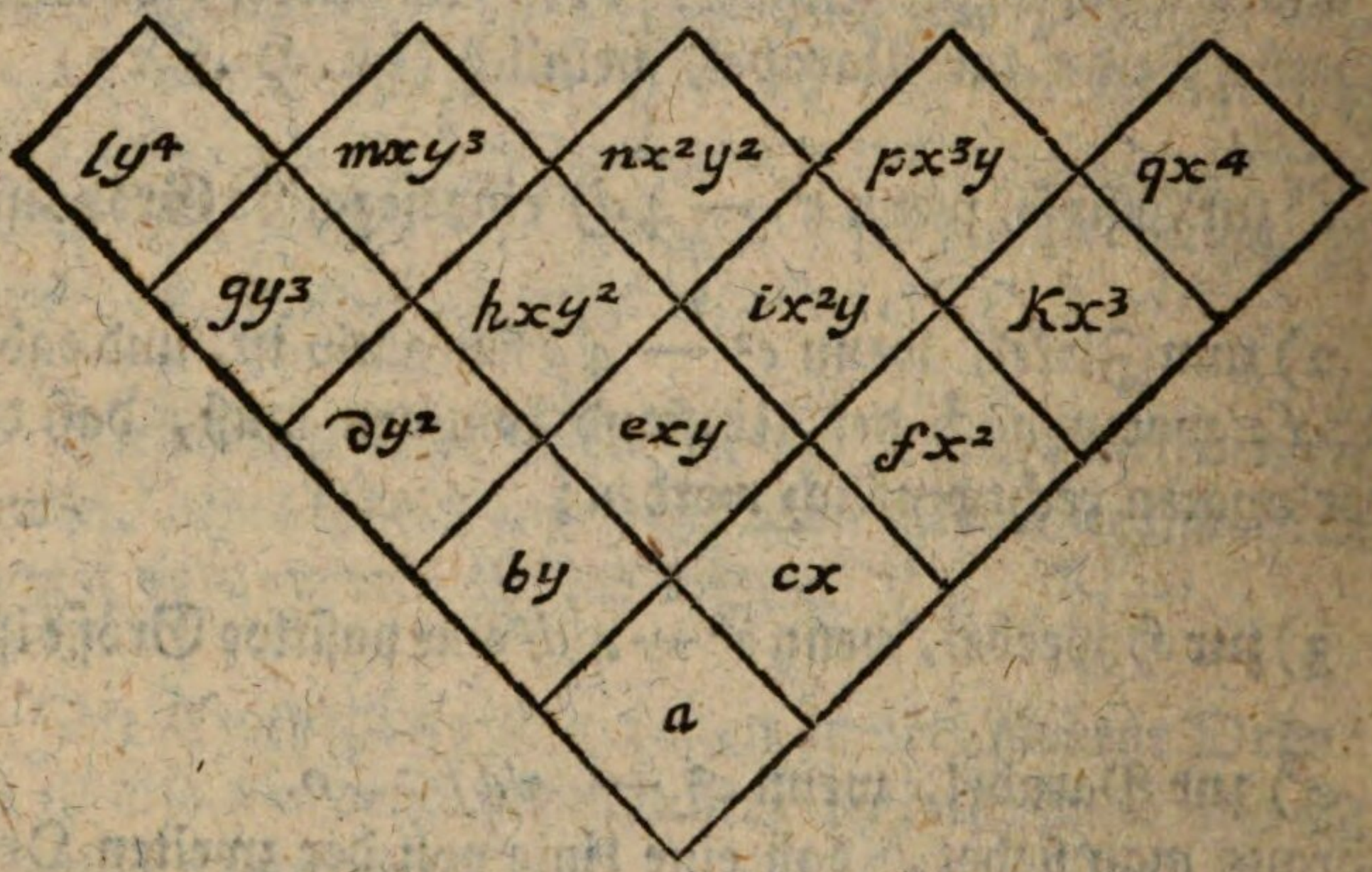
Die allgemeine Gleichung für die Linien der dritten Ordnung ist

$$a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = o$$

Auch diese, eben so wie die Linien von der vierten, fünften Ordnung, u. s. f. werden in verschiedene Klassen und Arten eingetheilet. Weil sie aber selten gebrauchet werden, so wollen wir uns dabei nicht aufhalten, hauptsächlich, da wir nur Anfangsgründe schreiben.

§. 18.

Um die vollständigen Gleichungen aller Linien von einerlei Ordnung recht sinnlich vorzustellen, hat man das analytische oder algebraische Dreieck erdacht, welches hier vorgestellet ist. Nimmt man in diesem Dreiecke die drei



untersten Felder, so hat man die Gleichung für die Linien der ersten Ordnung, nemlich $a + by + cx = o$.

Nimmt man noch die drei nächste Felder darzu, so bekömmt man die Gleichung für die Linien der zweiten Ordnung, nemlich $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = o$.

Nimmt

Nimmt man noch die vier nächsten Felder, so hat man die Gleichung für alle Linien des dritten Grades, nemlich $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + kx^3 = 0$.

Nimmt man wiederum die fünf nächsten Felder nebst den vorigen, so bekömmt man die Gleichung für alle Linien der vierten Ordnung, nemlich $a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + kx^3 + ly^4 + mxy^3 + nx^2y^2 + px^3y + qx^4 = 0$.

Mit einer geringen Aufmerksamkeit wird man leicht die Regel finden, wornach die Felder angefüllet worden. Die Sätze in jeder horizontalen Lage sind alle von einerlei Grade, und so wie der Exponent von y abnimmt, so nimmt der Exponent von x zu. Auf diese Art kann das Dreieck nach oben zu so viel vergrößert werden, als man will.

Will man die allgemeine Gleichung für irgend eine Ordnung der algebraischen Linien nach den Potenzen von x oder von y allein ordiniren, so findet man in den schiefen Lagen oder Binden der Felder des Dreiecks sogleich alle Sätze, wo die nemliche Potenz von x oder y vorkömmt. Zum Exempel, wenn man die Gleichung der Linien von der vierten Ordnung in Betreff des x ordiniren will, so findet man

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} qx^4 & + & px^3y & + & nx^2y^2 & + & mxy^3 & + & ly^4 \\ & + & kx^3 & + & ix^2y & + & hxy^2 & + & gy^3 \\ & & & + & fx^2 & + & exy & + & dy^2 \\ & & & & & + & cx & + & by \\ & & & & & & & + & a \end{array}$$

Hier haben wir nur bloß die schiefen Lagen des Dreiecks von der rechten Hand zur linken nach einander abgeschrie-

schrieben. Sammlet man alles, wodurch jede Potenz von x multipliziret ist, so bekömmt man

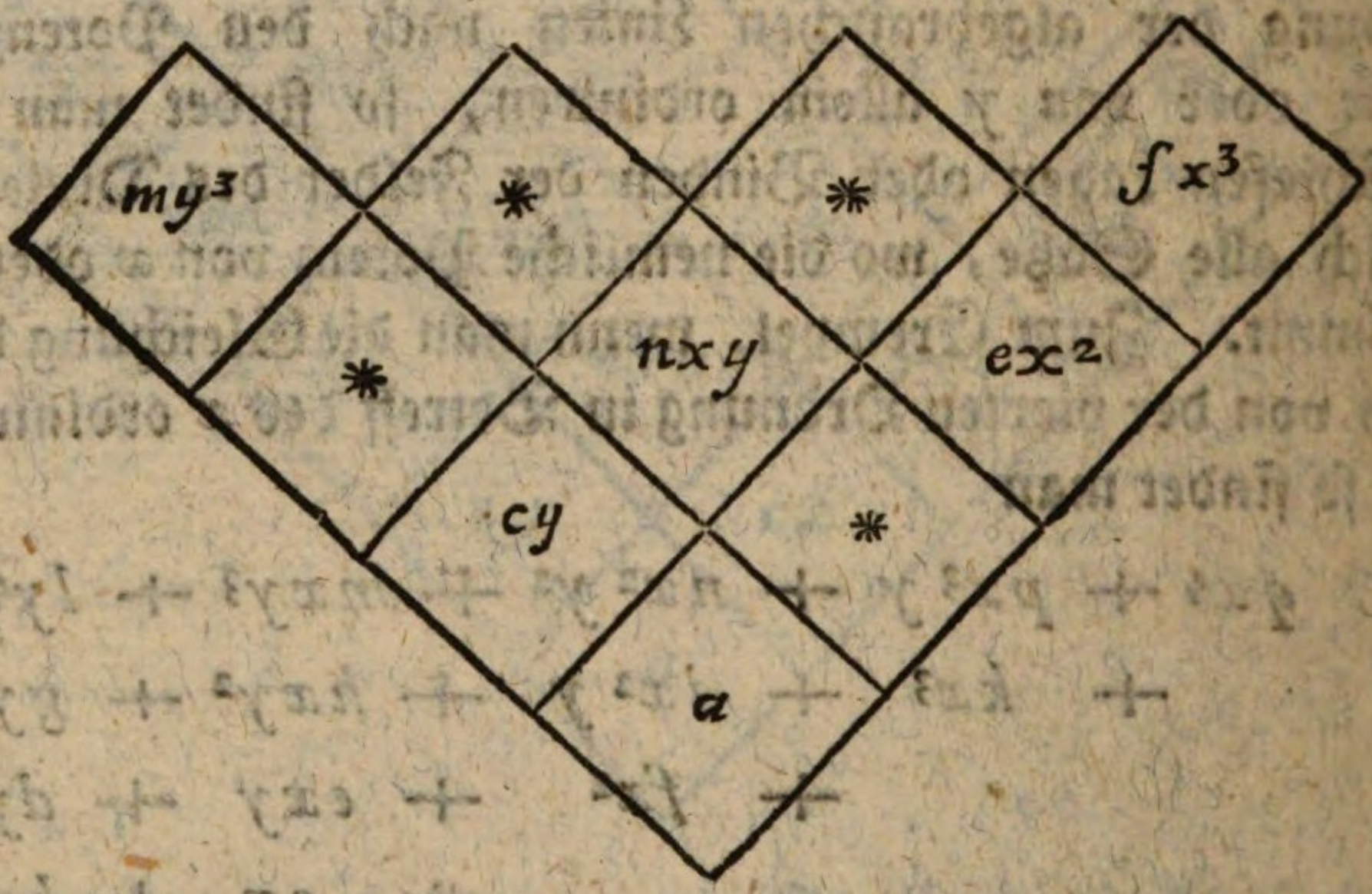
$$qx^4 + (py + k)x^3 + (ny^2 + iy + f)x^2 + (my^3 + hy^2 + ey + c)x + (ly^4 + gy^3 + dy^2 + by + a) = o$$

Hätte man linker Hand angefangen, so würde man die Gleichung nach den Potenzen von y ordiniret haben.

§. 19.

Wenn in einer Gleichung einige Sätze fehlen, und man will das analytische Dreieck gebrauchen, so müssen an deren Stellen Sternchen oder andere Zeichen gesetzet werden.

Gesetzt, es soll diese Gleichung $fx^3 + my^3 + ex^2 + nxy + cy + a = o$ auf das Dreieck gebracht werden, so bekömmt es folgende Gestalt,



Will man nun die Gleichung nach den Potenzen von x ordiniren, so bekömmt man sogleich

$$fx^3 + ex^2 + ny.x + (a + cy + my^3) = o$$

Soll

Soll hingegen die Gleichung nach den Potenzen von y ordiniret werden, so giebt das Dreieck

$$my^3 + o.y^2 + (c + nx)\,y + (a + ex^2 + fx^3) = o$$

Anmerkung. Das analytische Dreieck hat einen merklichen Nutzen in der Lehre von den algebraischen Linien; wir können uns aber in diesem Werke in keine Weitläuftigkeiten einlassen. Wer ein mehreres darüber wissen will, der lese das dritte und das siebente Kapitel in der *Introduction à l' Analyse des lignes courbes algébriques par Gabriel Cramer.* Nur dieses wollen wir noch bemerken, daß dieses Dreieck aus Newtons analytischem Rechtecke entstanden ist.

Siebentes Hauptstück.

Von einigen Rechnungs-Arten, die bei der Lehre von den krummen Linien vorfallen.

§. 1.

Es kann zwar billiger Weise vorausgesetzet werden, daß jemand, der die höhere Geometrie lernen will, sich vorher gehöriger Maaßen der Algebra beflissen habe. Jedoch giebt es einige Rechnungs-Arten, die man nicht in den gewöhnlichen Anleitungen zur Algebra anzutreffen pfleget, und die man folglich bei der höheren Geometrie nachholen muß. Sie sind zwar alle in meinem selbstlernenden Algebristen zu finden, wo ich die Algebra völlig rein und ohne Vermischung mit der Geometrie vorgetragen habe. Weil ich aber nicht verlangen kann, daß ein jeder, der das gegenwärtige Buch gebrauchen will, sich auch jenes anschaffe, so will ich das weniger bekannte daraus in diesem Hauptstücke kürzlich wiederholen.

§. 2.

Man findet in allen algebraischen Lehrbüchern die bekannten Regeln für die Multiplikazion, Division, Erhebung und Ausziehung derer Größen, welche Potenzen von anderen Größen sind. Z. E. Man weiß, daß

$$a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

$$\sqrt[c]{(a^b)} = a^{\frac{b}{c}}$$

Hingegen die negativen und gebrochenen Exponenten sind weniger bekannt.

§. 3.

In der zweiten angeführten Formel war $a^b : a^c = a^{b-c}$. Trift es sich nun, daß der negative Theil c des Exponenten dem positiven gleich ist, so wird der Exponent o, und der Werth der Potenz wird = 1. Zum Exempel, es ist $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0 = 1$. Die Einheit kann also allemal durch jede Wurzel ausgedrücket werden, wenn sie zu o erhoben wird; also ist $1 = a^0 = b^0 = 5^0 = 7^0$, u. s. f.

Wenn der negative Theil des Exponenten größer ist als der positive, so wird der Exponent negativ, und der Werth der Potenz ist ein Bruch, der die angezeigte Potenz zum Nenner, und die Einheit zum Zähler hat. Z. E. $a^2 : a^5 = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa}$ oder $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Man kann also jeden ähnlichen Bruch durch einen negativen Exponenten ausdrücken. Z. E. $\frac{1}{b^7} = b^{-7}$

Wenn man die Einheit einerseits mit einer Größe multipliziret, und das Produkt wiederum mit der nemlichen Größe, u. s. f.; wenn man auch anderseits die Einheit durch die angenommene Größe dividiret, und den Bruch wiederum durch die nemliche Größe; so bekömmt man eine Reihe von positiven und negativen Potenzen, die beiderseits ohne Ende fortgesetzet werden kann.

&c. $\frac{1}{aaaa}, \frac{1}{aaa}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a}, 1, a, aa, aaa, aaaa,$ &c.

oder &c. $a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, a^4$ &c.

§. 4.

Vermöge der vierten von den im 2ten §. angeführten Formeln, ist $\sqrt[c]{(a^b)} = a^{\frac{b}{c}}$ das heißt, wenn aus einer Potenz

Potenz a^b die Wurzel von der Ordnung c gezogen werden soll, so wird der Exponent b durch c dividiret.

Hierbei aber entstehet oft ein Bruch. Z. E.

$$\sqrt[5]{(a^{1\,2})} = a^{\frac{1}{5}2} = a^{2+\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{(a^1)} = a^{\frac{1}{3}}$$

&c. &c.

Bei solchen gebrochenen Exponenten darf man sich nur vorstellen, daß die gegebene Wurzel in so viel gleiche Faktoren getheilet sey, als der Nenner oder Divisor anzeiget; und daß man von diesen gleichen Faktoren so viel behält, als der Zähler oder das Dividendum anzeiget.

Z. E. Es sey gegeben $a^{\frac{2}{5}}$, so stelle man sich vor, es sey $a = xxxxx$, und von diesen 5 gleichen Faktoren behalte man nur 2 oder xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$. Denn es ist $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(a^2)}$. Ist nun $a = xxxxx$, so ist $a^2 = xxxxxxxxxx$ und $\sqrt[5]{a^2} = xx$, welches also mit der Erklärung völlig übereinstimmet.

Hieraus siehet man zugleich, daß, wenn eine Erhebung und ein Ausziehen geschehen soll, es gleich viel sey, ob man mit der einen oder anderen Operazion den Anfang mache. Z. E. $\sqrt[5]{(a^2)}$ ist eben so viel als $(\sqrt[5]{a})^2$. Denn wenn $a = xxxxx$, so haben wir gefunden, der erste Ausdruck $\sqrt[5]{(a^2)}$ gelte xx. Dieses gilt auch der zweite. Denn weil $a = xxxxx$, so ist $\sqrt[5]{a} = x$, und $(\sqrt[5]{a})^2 = xx$.

Anstatt des Wurzelzeichens kann man allemal einen gebrochenen Exponenten gebrauchen. Z. E. $\sqrt[2]{(a^5)} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2+\frac{1}{2}}$. Eben so ist $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt[3]{(a^2)} = a^{\frac{2}{3}}$.

Eine

Eine Potenz kann zugleich gebrochen und negativ seyn, z. E. es ist

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} \text{ oder } \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

§. 5.

Die negativen und die gebrochenen Exponenten erleichtern ungemein die Rechnungen, weil sie nach den nemlichen Regeln als die ganzen und positiven behandelt werden. Nemlich, wenn zwei Potenzen der nemlichen Wurzel multipliziret werden sollen, so addiret man die Exponenten algebraischer Weise, wodurch dann in bestimmten Zahlen die Addizion oft in eine Subtrakzion verwandelt wird. Wenn eine Potenz einer Größe durch eine andere Potenz der nemlichen Größe dividiret werden soll: so wird der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividenden algebraisch subtrahiret, wodurch oft bei bestimmten Exponenten eine Addizion entstehen kann. Wenn eine Potenz wiederum erhoben werden soll, so werden beide Exponenten algebraisch multipliziret. Soll aber eine Wurzel ausgezogen werden, so wird sie durch einen gebrochenen Exponenten ausgedrücket, und dann nach voriger Regel behandelt.

Hier folgen einige Exempel.

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$$

$$a^{-4} : a^{-5} = a^{-4+5} = a$$

$$(a^{-3})^2 = a^{-6}$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}$$

Um diese Vorschriften zu beweisen, darf man nur die negativen und gebrochenen Exponenten unter die gewöhnliche Gestalt bringen, und dann nach den bekannten Regeln verfahren.

Zum Exempel, es ist

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[2]{a} \times \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[4]{a}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{a^2}{a^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{a}} = \sqrt[4]{(a^{-1})}$$

$$= a^{-\frac{1}{4}}$$

$$a^{-4} : a^{-5} = \frac{1}{a^4} : \frac{1}{a^5} = \frac{a^5}{a^4} = a$$

$$(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

$$(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(a^{\frac{2}{3}})^4}$$

Nun ist $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2)} = (\sqrt[3]{a})^2$ und $(a^{\frac{2}{3}})^4 = (\sqrt[3]{a})^8$ $= \sqrt[3]{(a^8)}$ davon ist die fünfte Wurzel $\sqrt[15]{(a^8)} = a^{\frac{8}{15}}$.
Also ist $(a^{\frac{2}{5}})^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}$.

Will man die Beweise allgemeiner haben, so darf man sie nur mit unbestimmten Exponenten führen, das heißt, Buchstaben anstatt der Zahlen setzen.

§. 6.

Dieses mag von negativen und gebrochenen Exponenten genug seyn. Eine andere Lehre die nicht weniger wich-

tig

tig ist, ist die Lehre von den Funkzionen, wovon die Anfänger selten einige Kenntniß haben.

Eine Funkzion zweier oder mehrerer Größen ist eine Größe, welche aus der Verbindung derselben, vermittelst der verschiedenen einfachen Rechnungs-Arten entstehet.

Also sind die Summe, das Produkt, der Quozient, die Potenzen und Wurzeln einiger gegebenen Größen lauter Funkzionen derselben. Z. E. $a \pm b$, ab $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$ sind Funkzionen von a und b.

Und weil jede komplexe Größe als die Summe oder Differenz ihrer Glieder oder Sätze angesehen werden kann, so ist jede komplexe Größe eine Funkzion, nicht nur ihrer Sätze, sondern auch der einzelnen Größen, woraus die Sätze entstanden sind. Zum Exempel

$$abc \pm \sqrt[b]{\frac{a}{c}}$$

ist eine Funkzion von a, b und c.

§. 7.

Wenn in einer Funkzion eine Größe oder mehrere Größen zunehmen oder abnehmen, so ist es natürlich, daß der Werth der ganzen Funkzion entweder größer oder kleiner werden muß.

Eine veränderliche Größe ist diejenige, welche man sich vornimmt in einer Funkzion zu vergrößern, oder zu verkleinern, um zu erfahren, welcher Unterschied dadurch in der Funkzion selbst entstehen wird. Diejenigen Grössen hingegen, welchen man ihren Werth lassen will, ohne

ihn

ihn zu vergrößern noch zu verkleinern, heissen beständige Größen.

Z. E. Ich will erfahren, um wie viel das Produkt ab zunimmt, wenn der Faktor b allein um c größer wird. So ist hier a eine beständige und c eine veränderliche Größe. Gesetzet also, b nehme um c zu, so habe ich $a(b+c)$ oder $ab+ac$ anstatt ab. Dieses Produkt $ab+ac$ ist demnach um ac größer als das erste ab. Will ich aber im Produkte ab, sowohl a als b vergrößern, so sind a und b als veränderliche Größen anzusehen. Gesetzet also, a werde größer um d, und b werde größer um c, so bekomme ich $(a+d)(b+c) = ab+bd+ac+cd$, woraus ich sehe, daß das Produkt um $bd+ac+cd$ größer geworden ist.

Anmerkung. Man vergleiche diese bloß algebraische Erklärung der veränderlichen und beständigen Größen, mit derjenigen, welche im ersten Hauptstücke §. 4. gegeben worden, so wird man leicht einsehen, daß beide auf eines hinaus laufen, und daß nur der Gesichtspunkt etwas verschieden ist.

§. 8.

Um die veränderlichen Größen vor den beständigen zu unterscheiden, und um sich zu erinnern, welche Größen verändert werden, und welche man unverändert läßt, pfleget man die veränderlichen Größen mit z, y, x, &c. so wie sonst die unbekannten, zu bezeichnen. Die beständigen werden mit a, b, c, &c. bemerket.

Will ich also die Veränderung des Produktes ab erfahren, wenn b allein geändert wird, so schreibe ich anstatt ab bequemer ax oder ay, u. s. f. Will ich beide Faktoren verändern, so schreibe ich xy oder yz, u. s. f.

Um

Um kürzer zu reden, benennet man oft nur die veränderlichen Größen in einer Funkzion. Z. E. Anstatt zu sagen $(ax + cy)^m$ ist eine Funkzion von x, y, a, c, und m, saget man bloß, $(ax + cy)^m$ ist eine Funkzion von x und y, weil die Größen a, c und m, welche unverändert bleiben, weniger in Betrachtung kommen.

§. 9.

Eine Funkzion wird ganz oder gebrochen, razional oder irrazional genannt, nachdem die veränderlichen Größen in der durch diese Namen angedeuteten Gestalt erscheinen. Die beständigen Größen kommen hier nicht in Betrachtung. Z. E.

$$axy \pm \frac{x^2}{b} \pm \frac{y^2}{c} \text{ oder } axy \pm \frac{1}{b}x^2 \pm \frac{1}{c}y^2$$

ist eine ganze Funkzion von x und y. Diese hingegen

$$xy \pm \frac{a - b}{x + y} \pm \frac{c}{x^2}$$

ist eine gebrochene Funkzion von x und y.

Die Funkzion $x\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ist eine razionale Funkzion von x. Hingegen $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ ist eine irrazionale Funkzion von x, weil das x mit unter dem Wurzelzeichen stehet.

§. 10.

Eine Funkzion ist homogen in Betrachtung der veränderlichen Größen, wenn in jedem Satze gleich viel veränderliche Faktoren oder Dimensionen erscheinen. Sind es nicht gleich viel, so wird die Funkzion heterogen genannt

nannt. Jede Potenz gilt hier so viel einzelne Faktoren, als der Exponent Einheiten hat. Also ist

$$ax^2y \pm bxy^2 \pm cx^3 \pm dy^3$$

oder $axxy \pm bxyy \pm cxxx \pm dyyy$

eine homogene Funkzion von x und y, weil in jedem Satze drei veränderliche Faktoren vorkommen. Hingegen diese Funkzion

$$ax^2 \pm bxyz \pm cz^4$$

oder $axx \pm bxyz \pm czzzz$

ist heterogen, weil der erste Satz 2, der andere 3, und der dritte 4 veränderliche Dimensionen hat.

§. 11.

Die Ordnung oder der Grad einer Funkzion wird nach der größten Anzahl der veränderlichen Faktoren in einem Gliede gerechnet. Z. E.

$$ax \pm bxy \pm cx^2y$$

ist eine heterogene Funkzion von x und y von der dritten Ordnung oder vom dritten Grade, weil cx^2y oder $cxxy$ drei veränderliche Dimensionen enthält. Diese Funkzion

$$axyz \pm bx^2z \pm cxz^2$$

ist eine homogene Funkzion der Größen x, y und z vom dritten Grade, weil jeder Satz drei veränderliche Dimensionen hat.

§. 12.

Man hat oft nöthig eine gebrochene Funkzion in eine unendliche Reihe zu verwandeln. Dieses kann nun manchmal durch die algebraische Division geschehen.

Zum

Zum Exempel. Es soll $\frac{a}{a-x}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden, so dividire man algebraischer Weise a durch $a-x$

$$a-x \mid a \ldots\ldots \mid 1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{&c.}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{a-x} \\
+x \\
\\
+x-\frac{x^2}{a} \\
\underline{\qquad\qquad} \\
+\frac{x^2}{a}-\frac{x^3}{a^2} \\
\underline{\qquad\qquad} \\
+\frac{x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3} \\
\underline{\qquad\qquad} \\
+\frac{x^4}{a^3} \quad \text{&c. \&c.}
\end{array}$$

Hier siehet man sogleich, nach welchem Gesetze die Glieder der unendlichen Reihe auf einander folgen. Es ist nemlich

$$\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{a^5}+\text{&c.}$$

§. 13.

Will man eine binomische Funkzion von x die einen unbestimmten Exponenten hat in eine unendliche Reihe ver-

verwandeln, so kann man sich der Newtonischen Regel bedienen, vermöge welcher

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} x^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot a^{n-4} x^4$$
$$+ \&c.$$

Der strenge Beweis dieser Formel ist ziemlich weitläuftig, und man kann ihn im selbstlernenden Algebristen am Ende des Vten Hauptstückes nachschlagen. Unterdessen läßt sich die Regel auch aus der bloßen Analogie herleiten. Wenn man nemlich nach und nach vermittelst der bloßen Multiplikazion die Potenzen von $a+x$ machet, so findet man

$(a+x)^1 = a+x$

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2 x + 3ax^2 + x^3$

$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3 x + 6a^2 x^2 + 4ax^3 + x^4$

$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4 x + 10a^3 x^2 + 10a^2 x^3 + 5ax^4 + x^5$

&c. &c.

Laßt uns eine dieser Potenzen betrachten, z. E. die fünfte. Was die Potenzen des a und des x betrift, so siehet man, daß die von a in den auf einander folgenden Sätzen um 1 abnehmen, unterdessen daß die von x um 1 zunehmen. Es sey $5 = n$, so stehen die Sätze also, wenn man die Koeffizienten aus der Acht läßt,

$$a^n, a^{n-1} x, a^{n-2} x^2, a^{n-3} x^3, a^{n-4} x^4, a^{n-5} x^5$$

Und da dieses bei allen Potenzen eintrift, so drücket diese Reihe die gehörige Folgen der Potenzen von a und x in der $n$ten Potenz von $a+x$ aus.

Was

Was die Koeffizienten betrift, so fällt deren Folge nicht sogleich in die Augen. Jedoch, bei einer genaueren Untersuchung findet man, daß sie auf eine sehr einfache Art entstehen. Gesetzt, es sollen die Koeffizienten für die 5te Potenz gefunden werden, so schreibe zwei Reihen Zahlen in verkehrter Ordnung also unter einander

$$\frac{5.\quad 4.\quad 3.\quad 2.\quad 1}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}$$

Dividire die erste obere Zahl durch die erste untere, das Produkt der beiden ersten oberen durch das Produkt der beiden ersten unteren, ferner das Produkt der 3 ersten oberen durch das Produkt der 3 ersten unteren, und so ferner, so kommen alle Koeffizienten der 5ten Potenz zum Vorschein, nemlich

$$\frac{5}{1} \cdots\cdots = 5$$

$$\frac{5.\ 4}{1.\ 2} \cdots\cdots = 10$$

$$\frac{5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3} \cdots\cdots = 10$$

$$\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cdots = 5$$

$$\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 1$$

Setzet man diese Koeffizienten an die gehörigen Stellen, so ist $(a + x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$.

Setzet man $5 = n$, so folgen die Koeffizienten also auf einander

$$\frac{n}{1} \text{ oder } n$$

$$\frac{n\,(n-1)}{1.\quad 2}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}$$

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}$$

u. s. f.

Da nun die Erfahrung lehret, daß diese Vorschrift bei allen Potenzen eintrift, so haben wir eine allgemeine Regel um eine binomische Größe $a+x$ zur $n$ten Potenz zu erheben. Sie bestehen nemlich in der Formel die wir gleich im Anfange dieses Paragraphs angeführet haben. Man nennet sie Newtons Regel, weil dieser große Mathematiker sie am ersten entdecket hat.

Setzet man in die Formel anstatt n eine bestimmte Zahl, so wird sie allemal abbrechen, wo es seyn muß, und es werden die überflüßigen Sätze alle null werden. Z. E. Man setze in die Formel 4 anstatt n, so ist

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^{4-1}x + \frac{4(4-1)}{1.\quad 2}a^{4-2}x^2 + \frac{4(4-1)(4-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}a^{4-3}x^3 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}a^{4-4}x^4 + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}a^{4-5}x^5 \text{ &c.}$$

Die:

Dieser lezte Satz und alle folgenden werden null, weil im Zähler des Koffizienten der Faktor $4 - 4 = 0$ vorkömmt, welcher den ganzen Satz zu 0 machet. Es bleibet also nur

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^{4-1}x + \frac{4(4-1)}{1.\ 2.}a^{4-2}x^2$$

$$+\frac{4(4-1)(4-2)}{1.\ 2.\ 3.}a^{4-3}x^3$$

$$+\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{4-4}x^4$$

oder

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + \frac{4.\ 3.}{1.\ 2.}a^2x^2$$

$$+\frac{4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3}a^1x^3 + \frac{4.\ 3.\ 2.\ 1.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}a^0x^4$$

oder

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

Man erinnere sich daß $a^0 = 1$ (§. 3.)

Die Newtonische Regel kann auch bei negativen und gebrochenen Exponenten angewandt werden, wie wir weiter unten lehren werden. Alsdann aber bricht die Reihe nicht ab, sondern sie gehet ohne Ende fort.

Wenn der eine Theil des Binomiums negativ ist, und man macht, wie oben, die Potenzen nach und nach, so findet sich weiter kein Unterschied, als daß die Zeichen + und − abwechseln, so, daß die paarigen Potenzen des negati-

ven Theiles allemal das Zeichen + haben, die unpaarigen aber das Zeichen —. Es ist also überhaupt

$$(a \pm x)^n = a^n \pm n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.} a^{n-2} x^2$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{n-3} x^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} a^{n-4} x^4$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} a^{n-5} x^5$$

$$+ \&c.$$

Der Gebrauch der Newtonischen Formel wird durch folgende Bemerkung noch bequemer. Nemlich, wenn man den ersten Satz mit $n. \frac{x}{a}$, den zweiten mit $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{x}{a}$ den dritten mit $\frac{n-2}{3} \cdot \frac{x}{a}$ den vierten mit $\frac{n-3}{4} \cdot \frac{x}{a}$ multipliziret, so bekömmt man jedesmal den folgenden. Wenn man also den ersten Satz, wenn er schon gefunden ist, A nennet, den zweiten B, den dritten C u. s. f. so bekömmt man

$$(a \pm x)^n = a^n \ldots = A$$

$$\mp \frac{n}{1}, \frac{x}{a} \cdot A \ldots = B$$

$$+ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot B \ldots = C$$

$$\mp \frac{n-2}{3} \cdot \frac{x}{a} \cdot C \ldots = D$$

$$+ \frac{n-3}{4} \cdot \frac{x}{a} \cdot D \ldots = E$$

$$\mp \frac{n-4}{5} \cdot \frac{x}{a} \cdot E \ldots = F$$

$$+ \&c.$$

wo-

wodurch also sehr leicht jeder Satz aus dem vorhergehenden gefunden werden kann.

§. 14.

Anstatt der Division, die im §. 12 ist vorgeschrieben worden, um eine gebrochene Funkzion in eine unendliche Reihe zu verwandeln, kann man auch die Methode der ungewissen oder unbestimmten Koeffizienten gebrauchen. Man setzet nemlich die Funkzion sey gleich einer unendlichen Reihe von dieser Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

wo die Buchstaben A, B, C, D, E &c. Koeffizienten anzeigen, die noch ungewiß sind. Die Gleichung, welche aus dieser Voraussetzung entspringet, wird Mittel an die Hand geben, um die ungewissen Koeffizienten zu bestimmen. Ein Exempel wird die Sache deutlicher machen als die Regeln die man geben könnte.

Es solle durch diesen Weg der Bruch $\frac{a}{a-x}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden. Setze

$$\frac{a}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Multiplizire beiderseits mit $a - x$, so kömmt

$$\begin{aligned} a = {} & aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \&c. \\ & - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 - \&c. \end{aligned}$$

Im ersten Gliede der Gleichung stehet zwar nur a, man kann aber noch dazu setzen $o.x$, $o.x^2$, $o.x^3$, $o.x^4$, &c. um beiderseits die nemlichen Potenzen von x zu bekommen. Alsdann hat man

$$\left.\begin{array}{l} a \\ +o.x \\ +o.x^2 \\ +o.x^3 \\ +o.x^4 \\ +\&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} aA \\ +(aB-A)x \\ +(aC-B)x^2 \\ +(aD-C)x^3 \\ +(aE-D)x^4 \\ +\&c. \end{array}\right.$$

Sollen nun beide Glieder der Gleichung wirklich einerlei seyn, so ist

$$a = aA$$
$$o = aB - A$$
$$o = aC - B$$
$$o = aD - C$$
$$o = aE - D$$
$$\&c. \&c.$$

Hieraus bekömmt man

$$A = 1$$
$$B = \frac{1}{a}$$
$$C = \frac{1}{a^2}$$
$$D = \frac{1}{a^3}$$
$$E = \frac{1}{a^4}$$
$$\&c. \&c.$$

Setzet man diese Werthe von A, B, C, ꝛc. in die angenommene Gleichung, so ist

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \&c.$$

welches völlig mit demjenigen übereinstimmet, was durch die Division gefunden worden. (§. 12)

§. 15.

Die nemliche Methode der willkührlichen oder ungewissen Koeffizienten kann auch dienen, wenn man eine irrazio-

razionale Funkzion in eine unendliche Reihe verwandeln will. Die gegebene Funkzion sey $\sqrt{(1-x^2)}$. Man setze $\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$ Wir lassen hier die unpaarigen Potenzen von x aus, weil man voraussehen kann, daß man sie nicht nöthig haben wird. Man quadrire beiderseits, indem man die unendliche Reihe mit sich selbst multipliziret,

$$\begin{array}{l}
\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c. \\
\times\sqrt{(1-x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Fx^8 + \&c. \\
\hline
1-x^2 = A^2 + ABx^2 + ACx^4 + ADx^6 + AEx^8 + \&c. \\
\quad + ABx^2 + B^2x^4 + BCx^6 + BDx^8 + \&c. \\
\quad + ACx^4 + BCx^6 + C^2x^8 + \&c. \\
\quad + ADx^6 + BDx^8 + \&c, \\
\quad + AEx^8 + \&c. \\
\hline
1-x^2 = A^2 + 2ABx^2 + \left(\begin{matrix}2AC \\ +B^2\end{matrix}\right)x^4 + \left(\begin{matrix}2AD \\ +2BC\end{matrix}\right)x^6 + \left(\begin{matrix}2AE \\ +2BD \\ +CC\end{matrix}\right)x^8 \\
\quad + \&c.
\end{array}$$

Es ist demnach

$$\left.\begin{array}{l} +1 \\ -1.x^2 \\ +0.x^4 \\ +0.x^6 \\ +0.x^8 \\ +\&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} A^2 \\ +2ABx^2 \\ +(2AC+B^2)x^4 \\ +(2AD+2BC)x^6 \\ +(2AE+2BD+C^2)x^8 \\ +\quad \&c. \end{array}\right.$$

Wenn also beide Glieder der Gleichung einerlei seyn sollen, so muß seyn

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & 1 \\ 2AB & = & -1 \\ 2AC + BB & = & 0 \\ 2AD + 2BC & = & 0 \\ 2AE + 2BD + C^2 & = & 0 \\ \&c. & & \&c. \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen bekömmt man

$$A = + 1$$
$$B = - \tfrac{1}{2}$$
$$C = - \tfrac{1}{8}$$
$$D = - \tfrac{1}{16}$$
$$E = - \tfrac{5}{128}$$
$$\&c. \qquad \&c.$$

Folglich wird

$$\sqrt{(1 - x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \&c.$$

§. 16.

Wenn eine Größe einer Funkzion gleich ist, so saget man der Kürze halben, sie sey die Funkzion selbst. Z. E. Wenn $z = axy$, so saget man, z ist eine Funkzion von x und y.

Und wenn hier in der Funkzion veränderliche Größen vorhanden sind, so verstehet es sich, daß die Größe, die der Funkzion gleich ist, ihr allemal gleich bleiben soll, die veränderlichen Größen mögen nun zu oder abnehmen, so viel man will. Daher dann erhellet, daß eine Funkzion veränderlicher Größen, selbst eine veränderliche Größe sey.

§. 17.

In einer Gleichung ist jede Größe eine Funkzion aller übrigen, das heißt, jede kann allein auf die eine Seite des Gleichheit: Zeichens gebracht, und folglich durch eine Funkzion der übrigen ausgedrücket werden. Z. E. Es sey

$$a + bc = dc - m^2$$

so ist

$$a = (d - b)c - m^2$$
$$b = d - \frac{m^2 + a}{c}$$
$$c = \frac{dc - m^2 - a}{b}$$
$$m = \sqrt{(dc - bc - a)}$$

Wenn

Wenn auch dieses Absondern jeder Größe nicht jedesmal durch die bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra geschehen kann, so siehet man doch die metaphysische oder innere Möglichkeit der Sache ein, und alsdann wird gesaget, die eine Größe sey eine implizite oder verwickelte Funkzion der übrigen. Kann aber die Absonderung wirklich geschehen, so ist es eine explizite oder entwickelte Funkzion.

Sobald man also eine Gleichung siehet, worin zwei oder mehrere unbekannte Größen vorkommen, so kann man gewiß behaupten, es sey jede derselben eine Funkzion der übrigen.

§. 18.

Eben so wie man in einer Funkzion die Größen verändern kann, so läßt es sich auch in einer Gleichung thun. Dabei wird aber vorausgesetzet, daß bei jeder Veränderung die Gleichheit allemal Statt finde. Daher müssen in der Gleichung wenigstens zwei veränderliche Größen vorkommen, auf daß die eine sich nach den Veränderungen der anderen richten möge, um die Gleichheit wieder herzustellen. Denn da die eine, eine Funkzion der anderen ist, so kann keine von beiden verändert werden, ohne daß dadurch bei der anderen auch eine Veränderung geschehe, und diese Veränderung muß so beschaffen seyn, daß die anfängliche Gleichung unverletzet bleibe.

§. 19.

Da nun das nemliche, was wir jetzt bemerket haben, auch bei unbestimmten Aufgaben Statt findet, die auf eine Gleichung führen, wo die eine unbekannte Größe willkührlich bleibet, die andere aber ihren Werth nach dem willkührlichen Werthe der ersteren richten muß; so kann jede Gleichung, worin veränderliche Größen vorkommen, als eine unbestimmte Gleichung, oder umgekehret, es kann

jede unbestimmte Gleichung als eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren veränderlichen Größen betrachtet und behandelt werden.

§. 20.

Wenn eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen oder unbekannten Größen x und y gegeben ist, so läßt sich der Werth der einen, wo nicht durch eine endliche, doch wenigstens durch eine unendliche Funkzion der andern ausdrücken, das heißt, durch eine unendliche Reihe, worinn jeder Satz eine Funkzion dieser anderen Größe ist. Dazu gebraucht man wiederum die willkührlichen Koeffizienten. Wir wollen nur den gewöhnlichsten Fall erläutern, wo nemlich die erste Größe in einer unendlichen Funkzion der zweiten gegeben ist, und die zweite in einer unendlichen Funkzion der ersten verlanget wird. Dieser Fall gehöret zur Umkehrung der unendlichen Reihen. Es sey

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$$

und man verlange die Reihe umzukehren, das heißt, man wolle x in einer unendlichen Funkzion von y haben.

Man nehme an, es sey

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

Man mache das Quadrat, den Kubus, die vierte Potenz, u. s. f. so kömmt

$$x^2 = A^2 y^2 + 2ABy^3 + 2ACy^4 + \&c.$$
$$+ B^2 y^4 + \&c.$$

$$x^3 = \quad . \quad . \quad . \quad A^3 y^3 + 3A^2 By^4 + \&c.$$

$$x^4 = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A^4 y^4 + \&c.$$

Setzet

Setzet man diese Werthe von x, x^2, x^3, x^4, &c. in die gegebene Gleichung, so kömmt

$$y = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2} A^2 y^2 - ABy^3 - ACy^4 \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2} B^2 y^4 - \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{3} A^3 y^3 + A^2 By^4 + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{4} A^4 y^4 - \&c.$$

Folglich wird

$$\left.\begin{array}{l} 1.\,y \\ +0.y^2 \\ +0.y^3 \\ +0.y^4 \\ +\&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} Ay \\ +(B - \tfrac{1}{2} A^2) y^2 \\ +(C - AB + \tfrac{1}{3} A^3) y^3 \\ +(D - AC - \tfrac{1}{2} B^2 + A^2 B - \tfrac{1}{4} A^4) y^4 \\ +\&c, \quad \&c. \end{array}\right.$$

Also ist

$$1 = A$$
$$0 = B - \tfrac{1}{2} A^2$$
$$0 = C - AB + \tfrac{1}{3} A^3$$
$$0 = D - AC - \tfrac{1}{2} B^2 + A^2 B - \tfrac{1}{4} A^4$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Hieraus ziehet man

$$A = 1$$
$$B = \tfrac{1}{2}$$
$$C = \tfrac{1}{6}$$
$$D = \tfrac{1}{24}$$
$$\&c. \quad \&c.$$

Setzet

Setzet man nun diese Werthe in die angenommene Gleichung

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$$

so ist $x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^8}{24} + \&c.$

Dieses ist demnach die Funkzion von y, welche dem x gleich ist, wenn

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$$

§. 21.

Die Lehre von den Funkzionen hat ihren größten Nutzen in der Differenzial-Rechnung, wovon wir jezt das unentbehrlichste anführen wollen.

§. 22.

Wenn eine Größe in einer Funkzion verändert werden soll, so wird dasjenige, was der veränderlichen Größe zugesetzet oder abgenommen wird, durch den nemlichen Buchstaben angedeutet, der die veränderliche Größe selbst anzeiget, mit den Zeichen Δ voran. Das nemliche Zeichen kann ebenfalls die Zunahme oder Abnahme der Funkzion selbst zu erkennen geben.

Wenn im Produkte xy, sowohl x als y vergrößert werden sollen, so wird xy zu $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$, und die Funkzion hat zugenommen um $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$. Also ist

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y.$$

Solche mit Δ bezeichnete Größen werden Differenzen der veränderlichen Größen genannt, und es ist überhaupt

haupt die Differenz einer veränderlichen Größe nichts anders als die Zunahme oder Abnahme derselben.

§. 23.

Die Differenz einer Funkzion wird gefunden, wenn man erstlich jede veränderliche Größe um ihre Differenz vermehret, hernach aber die gegebene Funkzion abziehet. Z. E. Es ist

$$\Delta(x+y) = x+\Delta x+y+\Delta y-(x+y) = \Delta x+\Delta y$$
$$\Delta(x-y) = x+\Delta x-y-\Delta y-(x-y) = \Delta x-\Delta y$$
$$\Delta(xy) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy = y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y$$
$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y} = \frac{y\Delta x-x\Delta y}{yy+y\Delta y}$$
$$\Delta(x^n) = (x+\Delta x)^n - x^n$$

Es ist aber $(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

$x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$ (§. 13.)

Also, wenn man x^n abnimmt, so ist

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2}\Delta x^2 +$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.$$

Wir haben bei diesen Exempeln angenommen, daß die Größen in der Funkzion allemal zunehmen. Sollten aber einige abnehmen, so würden ihre Differenzen das Zeichen — bekommen, und übrigens würde die nemliche Vorschrift beobachtet.

Wenn man sich die in den Exempeln gefundenen Formeln merket, so kann man in einer komplexen Funkzion die

Diffe-

Differenz eines jeden Satzes aufschreiben, ohne die förmliche Subtrakzion zu verrichten. Es sey verlanget die Differenz von

$$xy + \frac{x}{z} - y^2,$$ so bekömmt man

$$\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

$$\Delta\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z}$$

$$\Delta(y^2) = (y+\Delta y)^2 - y^2 = 2y\Delta y + \Delta y^2$$

$$-\Delta(y^2) = -2y\Delta y - \Delta y^2$$

Nimmt man alle diese Differenzen zusammen, so bekömmt man

$$\Delta\left(xy + \frac{x}{z} - y^2\right) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y + \frac{z\Delta x - x\Delta z}{zz + z\Delta z} - 2y\Delta y - \Delta y^2.$$

Das nemliche hätte man erhalten, wenn man mit der ganzen Funkzion so verfahren wäre, wie mit den ersten Exempeln. Beständige Größen haben keine Differenz. Will man sie also nach den selbigen Formeln behandeln, die für veränderliche Größen gefunden worden, so kann man den beständigen Größen keine andere Differenz als o zuschreiben. Z. E. Man wollte die Formel $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy - y\Delta y}$ gebrauchen, um $\Delta\left(\frac{a}{y}\right)$ zu finden, so bekäme man

$$\frac{y\Delta a - a\Delta y}{yy + y\Delta y}$$

oder

oder, weil $\Delta a = o$

$$\frac{-a\Delta y}{yy + y\Delta y}$$

Sonst könnte man das nemliche allemal durch die Subtrakzion heraus bringen. Es ist

$$\Delta\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{a}{y+\Delta y} - \frac{a}{y} = \frac{-a\Delta y}{yy + y\Delta y}$$

§. 24.

Wann in einer Gleichung veränderliche Größen angenommen werden, so wird dabei vorausgesetzet, daß die Gleichheit bei allen Veränderungen Statt finde (§. 13.). Soll aber dieses seyn, so können die Veränderungen der Größen oder ihre Differenzen nicht alle willkührlich seyn, sondern sie müssen gewisse Verhältnisse oder Beziehungen gegen einander haben. Die Gleichung nun, welche die Verhältnisse oder Beziehungen der Differenzen in einer Gleichung ausdrücket, wird die Differenzen-Gleichung genannt.

§. 25.

Wenn eine Gleichung gegeben ist, worin veränderliche Größen enthalten sind, so muß man allemal die dazu gehörige Differenzen-Gleichung finden können, welches folgendermaaßen geschiehet.

Man vermehre in der gegebenen Gleichung jede veränderliche Größe um ihre Differenz. Zwischen die so veränderten Glieder der Gleichung setze man wiederum das Gleichheits-Zeichen, weil die Gleichheit bei allen Veränderungen bleiben soll. Von dieser neuen Gleichung subtrahire man die gegebene, nemlich das erste Glied von dem ersten und das zweite von dem zweiten. Zwischen beiden

Re-

Resten setze man abermals das Zeichen der Gleichheit, so hat man die verlangte Differenzen-Gleichung.

Es sey z. E.

$$ax + by = \frac{x}{c} + 3\zeta$$

so muß auch seyn

$$a(x+\Delta x)+b(y+\Delta y)=\frac{x+\Delta x}{c}+3(\zeta+\Delta\zeta)$$

oder $ax+a\Delta x+by+b\Delta y=\frac{x}{c}+\frac{\Delta x}{c}+3\zeta+3\Delta\zeta$

subtr. $ax \ldots +by \ldots = \frac{x}{c} \ldots +3\zeta \ldots$

bleibet $a\Delta x \ldots +b\Delta y = \ldots \frac{\Delta x}{c} \ldots +3\Delta\zeta$

oder, wenn man beiderseits mit c multipliziret,

$$ac\,\Delta\,x + bc\,\Delta\,y = \Delta\,x + 3c\,\Delta\,\zeta$$

oder $$(ac - 1)\,\Delta\,x + bc\,\Delta\,y = 3c\,\Delta\,\zeta$$

Hieraus erhält man

$$\Delta\,x = \frac{3c\,\Delta\,\zeta - b\,c\,\Delta\,y}{ac-1}$$

$$\Delta\,y = \frac{3c\,\Delta\,\zeta - (a\,c - 1)\,\Delta\,x}{b\,c}$$

$$\Delta\,\zeta = \frac{(a\,c-1)\,\Delta\,x + b\,c\,\Delta\,y}{3\,c}$$

Also enthält die gefundene Differenzen-Gleichung das Verhältniß, oder die Beziehung jeder Differenz gegen die übrigen.

Weil beim Suchen der Differenzen-Gleichung jeder Satz der gegebenen Gleichung um seine Differenz vergrös-

sert

fert wird, und darauf der Satz selbst abgezogen wird; so ist dieses Verfahren das nemliche, als wenn man die Differenz jedes Satzes insbesondere genommen hätte. Folglich kann man auch auf diese Art die Differenzen-Gleichung finden. Weil also gegeben ist

$$ax + by = \frac{x}{c} + 3\zeta$$

so ist $\Delta(ax) = a\Delta x$

$$\Delta(by) = b\Delta y$$

$$\Delta\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{\Delta x}{c}$$

$$\Delta(3\zeta) = 3\Delta\zeta$$

folglich wird die Differenzen-Gleichung

$$a\Delta x + b\Delta y = \frac{\Delta x}{c} + 3\Delta\zeta$$

eben wie vorher.

§. 26.

Weil in einer Differenzen-Gleichung jede Differenz eine Funkzion aller übrigen ist, so wird jede Differenz bestimmet, wenn alle übrigen bestimmet werden. Wenn man also den Differenzen einen bestimmten Werth, z. E. in Zahlen geben will, so muß man nothwendig eine Differenz unbestimmt lassen, weil sie durch die übrigen bestimmet wird.

§. 27.

Wenn die Differenzen der veränderlichen Grössen sehr klein sind, so daß sie zum Exempel nur Millionentheile der Einheit betragen, so können, wenn es nicht auf eine gar zu grosse Genauigkeit ankömmt, in der Differenz einer Funkzion, oder in einer Differenzen-Gleichung diejenigen Sätze weg-

gestrichen werden, worinn Produkte, Quadrate, Kuben u. s. f. der Differenzen vorkommen; weil alsdann diese Sätze gar wenig betragen.

In diesem Falle gebrauchen wir zum Unterschiede, anstatt des Δ das kleinere δ. Die Differenzen werden alsdann Differenziale genannt, woraus Differenzial-Funkzionen und Differenzial-Gleichungen entstehen. Mit solchen kleinen Differenzen beschäftiget sich hauptsächlich die Differenzial-Rechnung.

Wenn die Differenzen nicht nur an sich selbst sehr klein sind, sondern nach Belieben immer kleiner und kleiner angenommen werden können, so nennet man sie auch unendlich kleine Differenzen. Zum Unterschiede werden diejenigen Differenzen, welche weder sehr klein, noch unendlich klein sind, vollständige Differenzen genannt, woraus dann vollständige Differenzen der Funkzionen und vollständige Differenzen-Gleichungen entstehen.

Differenziren heißt aus einer gegebenen Funkzion oder Gleichung die dazu gehörige Differenzen-Funkzion oder Differenzen-Gleichung finden, wird aber meistens nur von sehr kleinen oder auch unendlich kleinen Differenzen gesaget.

§. 28.

Die Grundregeln der Differenzial-Rechnung sind sehr leicht zu finden. Man braucht nur die im Anfange des §. 23. angeführten Formeln nehmen, und darinn alle Sätze auszulassen, wo zwei oder mehrere Differenzial-Dimensionen vorkommen.

I.

Es war $\Delta(x \pm y) = \Delta x \pm \Delta y$.

Hier ist nichts wegzulassen, also ist auch bei kleinen Differenzen $\delta(x \pm y) = \delta x \pm \delta y$

wor-

woraus die Regel gefolgert wird, daß das Differenzial einer komplexen Funkzion die Differenziale aller einzelnen Sätze, mit Beibehaltung der Zeichen + und — enthalten muß. Ist in der Funkzion eine bloß beständige Größe vorhanden, so ist o ihr Differenzial (§. 23.)

II.

Es war $\Delta(xy) = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$ Hier wird bei kleinen Differenzen das Produkt $\Delta x\Delta y$ weggelassen. Es ist also

$$\partial(xy) = y\partial x + x\partial y$$

Es werde verlanget $\partial(xyz)$, so ist $xyz = x.\ yz$ und $\partial(xyz) = \partial(x.\ yz)$. Vermöge der lezt erhaltenen Formel aber ist

$$\partial(x.\ yz) = yz\partial x + x\partial(yz)$$

und vermöge der nemlichen Formel ist $\partial(yz) = z\partial y + y\partial z$, also ist

$$\partial(x.\ yz) = yz\,\partial x + x(z\partial y + y\partial z)$$

oder $\partial(xyz) = yz\partial x + xz\partial y + xy\partial z$

so kann man weiter gehen, und ein Produkt mehrerer veränderlichen Grössen differenziren.

Dabei bemerket man diese allgemeine Regel: das Differenzial eines Produktes einiger veränderlichen Größen bestehet aus den Differenzialen der einzelnen Faktoren, jedem mit den übrigen Faktoren multipliziret.

Wenn ein beständiger Faktor vorhanden ist, so differenziret man blos das Veränderliche und multipliziret hernach mit dem beständigen Faktor. Z. E. $\partial(ax) = a\partial x$, $\partial(abxy) = ab.\ \partial(xy) = ab\ (y\partial x + x\partial y) = ab\ y\partial x + abx\partial y$. Denn es ist $\partial(ax) = x\partial a. + a\partial x$. Da aber $\partial a = o$, so ist $\partial(ax) = a\partial x$. Desgleichen

ist $\partial(abxy) = bxy\partial a + axy\partial b + aby\partial x + abx\partial y$, und weil $\partial a = o$ und $\partial b = o$, so ist $\partial(abxy) = aby\partial x + abx\partial y = ab.\ \partial(xy)$.

III.

Es war $\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{yy + y\Delta y}$

Hier ist zwar kein Satz zu sehen, wo mehr als eine Dimension von Differenzen anzutreffen sey. Hingegen beträgt im Nenner $yy + y\Delta y$ oder $y(y + \Delta y)$ das Δy wenn es klein ist, nur wenig in Betrachtung des y, so daß $y + \Delta y$ nicht viel von y selbst unterschieden ist, und also ohne merklichen Irrthum seyn wird:

$$\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$$

das heißt, das Differenzial eines Bruches ist gleich dem Differenziale des Zählers mit dem Nenner multiplizirt, weniger dem Differenziale des Nenners, mit dem Zähler multiplizirt, und alles durch das Quadrat des Nenners dividiret.

Sollte noch ein Zweifel übrig bleiben, so setze man, es sey $\frac{x}{y} = z$

dann ist $yz = x$

$$y\partial z + z\partial y = \partial x$$

$$y\partial z = \partial x - z\partial y$$

$$\partial z = \frac{\partial x - z\partial y}{y}$$

Nun

Nun ist $z = \frac{x}{y}$, also

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\delta x - \frac{x}{y}\delta y}{y}$$

oder $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\delta x - x\delta y}{yy} = \frac{\delta x}{y} - \frac{x\delta y}{y^2}$

Ist der Renner des Bruches eine beständige Größe, so wird nur der Zähler allein differenziret. Z. E.

$$\delta\left(\frac{x}{a}\right) = \delta\frac{1}{a}x = \frac{1}{a}\delta x = \frac{\delta x}{a}$$

Ist der Zähler eine beständige Größe, so wird das Differenzial des Renners mit dem Zähler multiplizirt, und durch das Quadrat des Renners dividiret, das ganze Differenzial aber negativ genommen. Denn es ist

$$\delta\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{y\delta a - a\delta y}{y^2}$$

und weil $\delta a = o$, so ist

$$\delta\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{-a\delta y}{y^2}$$

das negative Zeichen bedeutet hier, daß, wenn y zunimmt, alsdann $\frac{a}{y}$ nicht zunehmen, sondern abnehmen muß.

IV.

Es war $\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^{n-2}\Delta x^2$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{n-3}\Delta x^3$$

$+$ &c.

Hier werden alle Sätze ausgelassen, welche Δx^2, Δx^3, Δx^4, ꝛc. enthalten, und dann ist

$$\delta(x^n) = n x^{n-1}\, \delta x$$

Zum Exempel $\delta(x^2) = 2x^{2-1}\, \delta x = 2x\, \delta x$

$$\delta(x^3) = 3x^{3-1}\, \delta x = 3x^2\, \delta x$$

$$\delta(x^4) = 4x^{4-1}\, \delta x = 4x^3\, \delta x$$

Das Differenzial einer Potenz enthält demnach die um 1 verminderte Potenz, mit dem Differenziale der Wurzel und mit dem Exponenten multipliziret.

Diese Regel läßt sich auch aus der Differenziazion der Produkte beweisen. Es ist z. E. $\delta(x^3) = \delta(xxx) = xx\, \delta x + xx\, \delta x + xx\, \delta x = 3x^2\, \delta x$ (No. II.) und so mit den übrigen Potenzen.

Die Vorschrift gilt ebenfalls bei negativen und gebrochenen Exponenten. Z. E.

$$\delta(x^{-n}) = -n.x^{-n-1}\, \delta x$$

Denn es ist $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Nun ist $\delta\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-\delta(x^n)}{x^{2n}}$ (No. III.) $= \frac{-n x^{n-1}\, \delta x}{x^{2n}}$ und wenn man x^{n-1} durch x^{2n} dividiret, so kömmt $x^{n-1-2n} = x^{-n-1}$. Also ist $\delta(x^{-n}) = -n x^{-n-1}\, \delta x$.

Eben so ist $\delta\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}\, \delta x$.

Denn es sey $z = x^{\frac{m}{n}}$

so ist $z^n = x^m$

$$nz^{n-1}\, \delta z = m x^{m-1}\, \delta x$$

$$\delta z = \frac{m x^{m-1}\, \delta x}{n z^{n-1}}$$

Nun

Nun ist $z^{n-1} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1} = x^{m-\frac{m}{n}}$ also ist

$$dz = \frac{m.x^{m-1}dx}{n.x^{m-\frac{m}{n}}}$$

dividire x^{m-1} durch $x^{m-\frac{m}{n}}$, so kömmt $x^{m-1-m+\frac{m}{n}}$ $= x^{\frac{m}{n}-1}$ Also ist

$$dz = d\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} dx$$

Eben so ist $d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$

denn es ist $d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = d\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\right) = \frac{-d\left(x^{\frac{m}{n}}\right)}{x^{\frac{2m}{n}}}$

Nun ist bewiesen worden, daß $d\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$,

also $d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = \frac{-\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx}{x^{\frac{2m}{n}}}$

Dividire $x^{\frac{m}{n}-1}$ durch $x^{\frac{2m}{n}}$, so kömmt $x^{\frac{m}{n}-1-\frac{2m}{n}}$ $= x^{-\frac{m}{n}-1}$ folglich ist

$$d\left(x^{-\frac{m}{n}}\right) = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx$$

Folglich hat die Regel in ihrem größten Umfange ihre Richtigkeit.

Wenn demnach solche Brüche als $\frac{1}{x^n}$, oder auch Wurzel-Größen als $\sqrt[m]{x^n}$ vorkommen, so darf man nur die ersten durch negative und die anderen durch gebrochene Exponenten ausdrücken, um die Differenziazion mit geringer Mühe zu verrichten.

Die nemliche Regel gilt nicht minder bei zweitheiligen Größen, wo der eine Theil eine beständige Größe ist. Z. E. Es ist

$$\partial \frac{a+x}{b+y} = \frac{(b+y)\partial x - (a+x)\partial y}{(b+y)^2}.$$

$$\partial (a+x)^n = n(a+x)^{n-1}\ \partial x$$

Mehrere Fälle werden sich in der Folge finden.

§. 29.

Nach den vorgeschriebenen Regeln lassen sich nun alle Funkzionen oder Gleichungen differenziren, wenn man nemlich jeden Satz für sich differenziret, wie schon bei den vollständigen Differenzen gelehret worden (§. 25).

Es sey diese Funkzion zu differenziren:

$$a x + b x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \frac{a}{x}$$

oder $$a x + b x^2 + x^{\frac{4}{3}} + a . x^{-1}$$

so ist das Differenzial derselben

$$a \partial x + 2 b x \partial x + \tfrac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - a x^{-2} \partial x$$

oder $$a \partial x + 2 b x \partial x + \tfrac{4}{3} \sqrt[3]{x} - \frac{a \partial x}{x^2}$$

oder $$\left(a + 2 b x + \tfrac{4}{3} \sqrt[3]{x} - \frac{a}{x^2}\right) \partial x$$

Es sey zu differenziren die Gleichung

$$xy + ax^3 = b + y^2 + x^4$$

so kömmt $y\,\partial x + x\,\partial y + 3ax^2\,\partial x = 2y\,\partial y + 4x^3\,\partial x$

oder $x\,\partial y - 2y\,\partial y = 4x^3\,\partial x - y\,\partial x - 3ax^2\,\partial x$

oder $(x - 2y)\,\partial y = (4x^3 - y - 3ax^2)\,\partial x$

oder auch $\partial y = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y} \cdot \partial x$

§. 30.

Wenn man eine Gleichung von zwei veränderlichen Grössen x und y differenziret hat, so kann man allemal ∂y bekommen, in einer Funkzion von x und y, welche mit ∂x multipliziret ist, wie aus dem lezten Exempel zu sehen ist. Dividiret man nun ferner beiderseits durch ∂x, so kömmt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y}$$

das heißt, man bekömmt das geometrische Verhältniß zwischen ∂y und ∂x in einem Ausdrucke, worinn keine Differenziale enthalten sind, und der bloß eine Funkzion von x und y ist.

§. 31.

Laßt uns noch merken, daß wir die Regeln der Differenziation für den Fall gegeben haben, wo die veränderlichen Grösen alle zunehmen, und folglich ihre Differenziale alle positiv sind. Auch pfleget man allemal in dieser Voraussetzung zu differenziren, weil das Resultat der Rechnung es zulezt doch anzeigen muß, ob eines der Differenziale negativ werden soll. Z. E. Man differenzire

$$y^2 = a^2 - x^3$$

so kömmt $2y\partial y = -2x\partial x$

$$y\partial y = -x\partial x$$

$$\partial y = -\frac{x\partial x}{y}$$

Hier siehet man, daß ∂y nothwendig einen negativen Werth bekömmt, wenn ∂x positiv ist, oder daß y abnehmen muß, wenn x zunimmt. Es ist demnach nöthig für die negativen Differenziale besondere Regeln zu geben.

§. 32.

Bei den sehr kleinen Differenzen muß man sich allemal erinnern, daß die Funkzionen oder Gleichungen, worinn sie enthalten sind, keine vollkommene Richtigkeit haben, (§.27.) sondern nur Näherungen sind, weil allemal einige Sätze darinn fehlen. Je kleiner aber die Differenzen sind, desto weniger beträgt der Irrthum.

Es sey demnach y eine Funkzion von x, oder es sey eine Gleichung zwischen x und y gegeben, und es werde differenziret, so bekömmt man einen Werth von ∂y in einer Funkzion x und ∂x oder von x, y und ∂x. Dieser Werth wird um desto richtiger seyn, je kleiner ∂x und folglich ∂y angenommen werden. Er wird aber das vollständige Δy nie den gefundenen Werth vollkommen erreichen.

Wenn nun eine Grösse sich einer andern so viel nähern kann als man will, derselben aber nie vollkommen gleich werden kann, so sagen die Geometer diese lezte sey die Gränze der ersten.

Es ist demnach der erhaltene Werth von ∂y die Gränze des Werthes von Δy. Zum Exempel, wenn

$$xy + ax^3 = b + y^2 + x^4$$

so

so wurde gefunden (§ 29.)

$$\partial y = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y} \partial x$$

Also ist

$$\frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y} \partial x$$

die Gränze von Δy. Das heißt, je kleiner Δy angenommen wird, desto mehr nähert es sich diesem Werthe.

Vorige Differenzial-Gleichung giebt (§. 30.)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y}$$

Hier ist wiederum

$$\frac{4x^3 - y - 3ax^2}{x - 2y}$$

die Gränze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; das heißt, je kleiner Δy und Δx angenommen werden, desto mehr nähert sich das Verhältniß zwischen Δx und Δy dem Verhältniße zwischen $(x - 2y)$ und $(4x^3 - y^2 - 3ax^2)$, oder desto näher kömmt es der Wahrheit, daß

$$\partial x, \partial y :: (x - 2y), (4x^3 - y - 3ax^2)$$

Dieses alles wird noch deutlicher werden, wenn man die Anwendungen davon in der Folge sehen wird.

§. 33.

Wenn man eine Differenzial-Funkzion oder eine Differenzial-Gleichung hat, so hindert nichts, daß man die Differenziale der veränderlichen Grössen, so wohl als die veränderlichen Grössen selbst, zum zweiten, dritten, vier-

tens

tenmale verändere, u. s. f. Hierbei kann auch, wie es meistens geschiehet, angenommen werden, daß eines der Differenziale z. E. dx allemal einerlei oder beständig bleibe. Hingegen die veränderlichen Grössen selbst als x und y können nicht als beständig angesehen werden, weil sonst das erste Differenzial dx, dy gar nicht Statt finden könnte.

§. 34.

Soll nun eine Funkzion oder eine Gleichung zum zweiten, dritten, viertenmale, differenziret werden, so betrachte man nicht nur die veränderlichen Grössen, sondern auch ihre ersten Differenziale als veränderlich, und differenzire übrigens nach den nemlichen Vorschriften, welche für die erste Differenziazion gegeben worden (§ 28.). Man merke dabei, daß das zweite Differenzial einer veränderlichen Grösse y durch ddx oder d^2y, das dritte durch $dddy$ oder d^3y, das vierte durch d^4y und überhaupt das $n$te durch $d^n y$ ausgedrücket werde. Soll ein erstes Differenzial, z. E. dx als beständig betrachtet werden, so wird dasselbe auch wirklich wie eine beständige Grösse behandelt, und es ist alsdann ddx oder $d^2x = o$, $dddx$ oder $d^3x = o$, $d^n x = o$.

Zum Exempel, es sey $y^5 = ax^4$, so bekömmt mna erstlich

$$5y^4\,dy = 4ax^3\,dx$$

Gesezt nun, es soll weiter differenziret, aber dx als beständig betrachtet werden, so ist

$$\begin{aligned} d(y^4\,dy) &= dy.\,d(y^4) + y^4.\,d(dy) \\ &= dy.\,4y^3\,dy + y^4\,d^2y \\ 5\,d(y^4\,dy) &= 20y^3\,dy^2 + 5y^4\,d^2y \end{aligned}$$

Ferner, wenn dx beständig ist, so wird

$$\begin{aligned} d(4ax^3\,dx) &= 4a\,dx.\,d(x^3) \\ &= 4a\,dx.\,3x^2\,dx \\ &= 12ax^2\,dx^2 \end{aligned}$$

Also wird

$$20y^3\,dy^2 + 5y^4\,d^2y = 12ax^2\,dx^2$$

Wollen wir noch zum dritten male differenziren, so ist

$$d(y^3\,dy^2) = dy^2 \cdot d(y^3) + y^3 \cdot d(dy^2)$$
$$= 3y^2\,dy^3 + 2y^3\,dy\,d^2y$$

also $20\,d(y^3\,dy^2) = 60y^2\,dy^3 + 40y^3\,dy\,d^2y$

Ferner ist $d(y^4\,d^2y) = d^2y \cdot d(y^4) + y^4 \cdot d(d^2y)$
$= 4y^3\,dy\,d^2y + y^4\,d^3y$

also $5\,d(y^4\,d^2y) = 20y^3\,dy\,d^2y + 5y^4\,d^3y$

Zulezt ist, wenn dx als beständig betrachtet wird

$$d(12ax^2\,dx^2) = 12a\,dx^2 \cdot d(x^2)$$
$$= 24ax\,dx^3$$

Also ist, wenn man alles zusammen nimmt,

$$60y^2dy^3 + 40y^3dyd^2y + 20y^3dyd^2y + 5y^4d^3y = 24axdx^3$$

oder

$$60y^2\,dy^3 + 60y^3\,dy\,d^2y + 5y^4d^3y = 24ax\,dx^3$$

Wir haben also im vorigen Exempel gefunden daß, wenn $y^5 = ax^4$, so ist

I) $5y^4\,dy = 4ax^3\,dx$

II) $20y^3\,dy^2 + 5y^4\,d^2y = 12ax^2\,dx^2$

III) $60y^2\,dy^3 + 60y^3\,dy\,d^2y + 5y^4\,d^3y = 24ax\,dx^3$

und so kann man weiter gehen. Dividiret man die erste Differenzial-Gleichung durch dx, die zweite durch dx^2, die dritte durch dx^3, so kömmt

$$\text{I)}\quad 5y^4\,\frac{dy}{dx} = 4ax^3$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{4ax^3}{5y^4}$$

II) $$20y^3 \frac{dy^2}{dx^2} + 5y^4 \frac{d^2y}{dx^2} = 12ax^3$$

$$\text{oder } 5y^4 \frac{d^2y}{dx^2} = 12ax^2 - 20y^3 \frac{dy^2}{dx^2}$$

$$\text{oder } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12ax^2 - 20y^3 \frac{dy^2}{dx^2}}{5y^4}$$

Weil nun vorher gefunden worden

$\frac{dy}{dx} = \frac{4ax^3}{5y^4}$ so ist $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{16a^2x^6}{25y^8}$, substituiret man diesen Werth, so kömmt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12ax^2 - 20y^3 \cdot \frac{16a^2x^6}{25y^8}}{5y^4}$$

$$= \frac{12ax^2 - \frac{20.16.a^2x^2.y^3}{25y^8}}{5y^4}$$

$$= \frac{12ax^2 - \frac{4.16.a^2.x^2}{5y^5}}{5y^4}$$

$$= \frac{60ax^2y^5 - 64a^2x^2}{25y^9}$$

III)

III) $60y^2\frac{dy^3}{dx^3}+60y^3\frac{dy.d^2y}{dx\,dx^2}+5y^4\frac{d^3y}{dx^3}.=24ax$

oder $5y^4\frac{d^3y}{dx^3}=24ax-60y^2\frac{dy^3}{dx^3}-60y^3\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{24ax-60y^2\frac{dy^3}{dx^3}-60y^3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{5y^4}$$

Hier kann nun wieder aus den vorigen Gleichungen $\frac{dy^3}{dx^3}$ oder $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$, desgleichen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituiret werden.

Wenn also eine Gleichung zwischen x und y gegeben ist, so lassen sich die Verhältnisse $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ &c. in lauter Funkzionen von x und y ausdrücken, vorausgesetzet, daß dx als beständig betrachtet werde. Wollte man in solchen Funkzionen den Werth von y aus der gegebenen Gleichung substituiren, so bekäme man die nemlichen Verhältnisse in bloßen Funkzionen von x allein.

§. 35.

In eine weitläuftigere Erklärung der höheren Differenziale können wir uns nicht einlassen. Wer dieselbe verlanget, der kann sie in meinem selbstlernenden Algebristen im XVIIten Hauptstücke finden. Hier wollen wir nur noch einen Lehrsatz anführen, der von der größten Wichtigkeit ist.

Aus den Differenzialen einer Funkzion läßt sich die vollständige Differenz derselben finden, welches oft einen großen Nutzen schaffen kann.

Es

Es sey y eine Funkzion von x, oder es sey gegeben eine Gleichung zwischen x und y, so läßt sich y durch eine endliche oder unendliche Reihe von dieser Gestalt ausdrücken

$$y = a + bx^m + cx^n + cx^q + \&c.$$

das heißt, der Werth von y kann nicht anders, als durch eine oder mehrere Potenzen von x mit beständigen Koeffizienten ausgedrücket werden, wovon man oben (§. 12 bis 20) Exempel gesehen hat. Wir wollen nur annehmen, es sey

$$y = a + bx^m$$

denn, was vom Satze bx^m gelten wird, das muß auch von allen übrigen gelten. Ist demnach $y = a + bx^m$, so wird (§. 23.)

$$\Delta y = bmx^{m-1}\Delta x + b.\frac{m(m-1)}{1.2}.x^{m-2}\Delta x^2 + b.\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^{m-3}\Delta x^3 + b.\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}.x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.$$

Anstatt der vollständigen Differenz suche man die auf einander folgenden Differenziale, und betrachte dx als beständig.

Weil $y = a + bx^m$

so ist $dy = bmx^{m-1}dx$

$$d^2y = b.m(m-1).x^{m-2}dx^2$$

$$d^3y = b.m(m-1)(m-2).x^{m-3}dx^3$$

$$d^4y = b.m(m-1)(m-2)(m-3).x^{m-4}dx^4$$

&c. &c.

oder $\frac{\partial y}{\partial x} = b\,m\,x^{m-1}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b.\,m(m-1)x^{m-2}$

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = b.\,m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = b.\,m\,(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$

&c. *&c.*

Man siehet, daß diese Sätze mit den vorher gefundenen, welche Δy ausdrücken, eine große Aehnlichkeit haben. Man braucht nur noch zu multiplizirren

$\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $b\,m\,x^{m-1}$ mit Δx

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ oder $b\,m(m-1)x^{m-2}$ mit $\frac{\Delta x^2}{1,\ 2}$

$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ oder $b.\,m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ mit $\frac{\Delta x^3}{1,2,3}$

$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ oder $b.m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$ mit $\frac{\Delta x4}{1,2,3,4}$

so wird man alle Sätze bekommen, welche Δy oder die vollständige Differenz von y ausdrücken. Es ist demnach

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.\frac{\Delta x3}{1,2,3}$$

$$+ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} + \text{&c.}$$

wohl gemerket, daß ∂x beständig ist.

§. 36.

Laßt uns den Gebrauch der gefundenen Formel durch ein Exempel zeigen. Es sey gegeben $y = x^{-n}$ so bekömmt man, wenn man nach und nach differenziret, und dx als beständig betrachtet,

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{-n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n(-n-1)x^{-n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -n(-n-1)(-n-2)x^{-n-3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -n(-n-1)(-n-2)(-n-3)x^{-n-4}$$

&c. &c.

Setzet man diese Werthe in die Formel des vorigen Paragraphs, so ist

$$\Delta y = -nx^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2}x^{-n-2}\Delta x^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.\ 2.\ 3}\Delta x^3 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\Delta x^4$$

&c. &c.

Es ist aber $\Delta y = \Delta(x^{-n}) = (x+\Delta x)^{-n} - x^{-n}$, also ist

$$(x+\Delta x)^{-n} - x^{-n} = -n.x^{-n-1}\Delta x + \frac{-n(-n-1)}{1.\ 2}x^{-n-2}\Delta x^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1.\ 2.\ 3}x^{-n-3}\Delta x^3$$

&c. &c.

Hier

Hieraus folget

$$(x+\Delta x)^{-n} = x^{-n} - n.x^{-n-1}\,\Delta x - \frac{n(-n-1)}{1.\ 2}\,x^{-n-2}\,\Delta x^2$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

Nun können x und Δx Größen seyn, welche man will, es sey also $x = a$ und $\Delta x = b$, so wird

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} - n.a^{-n-1}\,b - \frac{n(-n-1)}{1.\ 2}\,a^{-n-2}\,b^2$$

$$- \&c.$$

Welches also beweiset, daß die Newtonische Regel (§. 13) sich nicht nur auf positive sondern auch auf negative Exponenten anwenden läßt.

Auf eine ganz ähnliche Art wird man finden, daß

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\,a^{\frac{m}{n}-1}\,b + \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}\,a^{\frac{m}{n}-2}\,b^2$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}\,a^{\frac{m}{n}-3}\,b^3$$

$$+ \&c.$$

und daß folglich die Newtonische Regel auch bei gebrochenen Exponenten gebrauchet werden kann.

§. 37.

Nun bleibet uns noch übrig so viel von der Integral-Rechnung zu sagen, als einem Anfänger unentbehrlich ist.

Es ist gezeiget worden, wie aus einer Funkzion ihr Differenzial gefunden werden kann. Nun muß auch gelehret werden, wie aus dem gegebenen Differenziale einer Funkzion, die Funkzion selbst wieder gefunden werden kann. Das gegebene Differenzial wird manchmal das Element der gesuchten Funkzion genannt, und diese ist das Integral oder die Summe. Die Rechnung selbst, wodurch das Integral gefunden wird, heißt die Integral-Rechnung.

§. 38.

Das gesuchte Integral wollen wir durch den Buchstaben ſ andeuten, welcher also hier, eben wie das d des Differenzials, keine Größe, sondern ein bloßes Zeichen ist. Also bedeutet z. E. dieser Ausdruck:

$$\int \frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$$

daß man eine Funkzion suchen soll, deren Differenzial $\frac{a\,dx}{(p+qx)^n}$ sey.

§. 39.

In der Integral-Rechnung kommen viel verschiedene Fälle in Betrachtung. Denn es kann die gegebene Funkzion entweder nur eine, oder mehr als eine veränderliche Größe enthalten. Es kann auch die gegebene Funkzion entweder von der ersten, oder von einer höheren Differenzial-Ordnung seyn. Es kann ferner die Funkzion ganz oder gebrochen, razional oder irrazional seyn. Sie kann logarithmische Größen und trigonometrische Größen enthalten. Hier aber wollen wir nur die aller gewöhnlichsten und leichtesten Fälle betrachten. Mit folgenden Formeln kann sich ein Anfänger begnügen.

I) $\int \partial x = x + C$

II) $\int a \partial x = a \int \partial x = ax + C$

III) $\int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

IV) $\int (a+x)^n \partial x = \frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} + C$

V) $\int (a+bx)^n \partial x = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C$

VI) $\int \frac{\partial x}{(a+bx)^n} = \frac{-1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}} + C$

Die Größe C ist eine willkührliche beständige Größe die man allemal zum Integrale hinzuthun muß. Denn da beim Differenziren die bloß beständigen Sätze verschwinden, so kann man allemal annehmen, daß bei der Funkzion, die das gegebene Differenzial hervorgebracht hat, eine beständige Größe gewesen sey. Diese bezeichnet man nun überhaupt mit C. Die Umstände der Aufgabe oder auch der freie Wille des Rechners müßen dieses C bestimmen. Wir werden in der Folge Beispiele davon antreffen.

§. 40.

Die angeführten Formeln lassen sich nicht bequemer beweisen, als wenn man das angegebene Integral differenziret, da dann die gegebene Differenzial-Funkzion wieder heraus kommen muß. Hierbei mache man nun noch folgende Anmerkungen.

I) Wenn eine Differenzial-Formel mit beständigen Größen multiplizirt oder dividirt ist, so muß auch das Integral ebenfalls multiplizirt oder dividirt werden.

Z. E. Es ist $\int q(a+x)^{\frac{3}{2}} dx = q\int (a+x)^{\frac{3}{2}} dx$

$$= q \cdot \frac{(a+x)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{2q\,(a+x)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$= \tfrac{2}{5} q (a+x)^{\frac{5}{2}}$$

II) Wenn die gegebene Differenzial-Funkzion mehrere Sätze enthält, so wird jeder Satz insbesondere integriret. Z. E. Es ist

$$\int (a^3\,dx + b^2\,x\,dx + cx^2\,dx + x^3\,dx)$$

$$= \int a^3\,dx + \int b^2 x\,dx + \int cx^2\,dx + \int x^3\,dx$$

$$= a^3 x + \tfrac{1}{2} b^2 x^2 + \tfrac{1}{3} cx^3 + \tfrac{1}{4} x^4$$

III) Will keine Formel auf die gegebene Funkzion passen, so verwandele man sie in eine unendliche Reihe, und integrire dann Satz für Satz.

Gesetzt, es wäre zu integriren

$$dx\sqrt{(1-x^2)}$$

oder $$dx\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

so ist (§. 15)

$$\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \&c.$$

Also ist

$$dx\sqrt{(1-x^2)} = dx - \tfrac{1}{2}x^2\,dx - \tfrac{1}{8}x^4\,dx - \tfrac{1}{16}x^6\,dx - \tfrac{5}{128}x^8\,dx - \&c.$$

Integriret man jeden Satz, so kömmt

$$\int dx\sqrt{(1-x^2)} = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{40}x^5 - \tfrac{1}{112}x^7 - \tfrac{5}{1152}x^9 - \&c.$$

IV) In einer Differenzial-Gleichung wird jeder Satz für sich integriret.

Es sey gegeben $2ay\,dy = ap\,dx - 2px\,dx$

so ist $\int 2ay\,dy = ay^2$, $\int ap\,dx = apx$, $\int 2px\,dx = px^2$,

folglich $$ay^2 = apx - px^2$$

Alle

Alle diese Bemerkungen fließen aus der Natur der Sache, und aus den umgekehrten Vorschriften der Differenzial-Rechnung. Daher bedürfen sie keines weiteren Beweises.

§. 41.

Hiermit schließen wir das gegenwärtige Hauptstück, indem wir uns vorbehalten, schwerere oder ungewöhnlichere Fälle der höheren Algebra, an den Stellen zu erklären, wo es nöthig seyn wird.

Achtes Hauptstück.

Von den Tangenten der krummen Linien, mit rechtwinklichen Koordinaten.

§. 1.

Da nun der Leser aus dem vorigen Hauptstücke die Anfangsgründe der höheren Rechnungs-Arten entweder erlernet oder wiederholet hat, so hindert uns nichts mehr dieselben auf die Lehre von den krummen Linien anzuwenden. Und da die Fälle am leichtesten sind, wo die Koordinaten senkrecht auf einander stehen, so wollen wir uns anfänglich daran halten, und hernach die Betrachtung der schiefwinklichen Koordinaten in einem besonders dazu bestimmten Hauptstücke vornehmen.

Unter allen Aufgaben, welche die krummen Linien betreffen, giebt es keine leichteren als diejenigen, welche die Tangenten und die mit denselben verknüpften Linien zum Gegenstande haben. Auch wollen wir uns jezt damit beschäftigen.

Was überhaupt eine Tangente, eine Subtangente, eine Normal-Linie und eine Subnormal-Linie ist, haben wir schon bei Gelegenheit der Kegelschnitte erkläret (II. H. §. 1.), und brauchen es also hier nicht zu wiederholen. Wir schreiten demnach zu den Aufgaben.

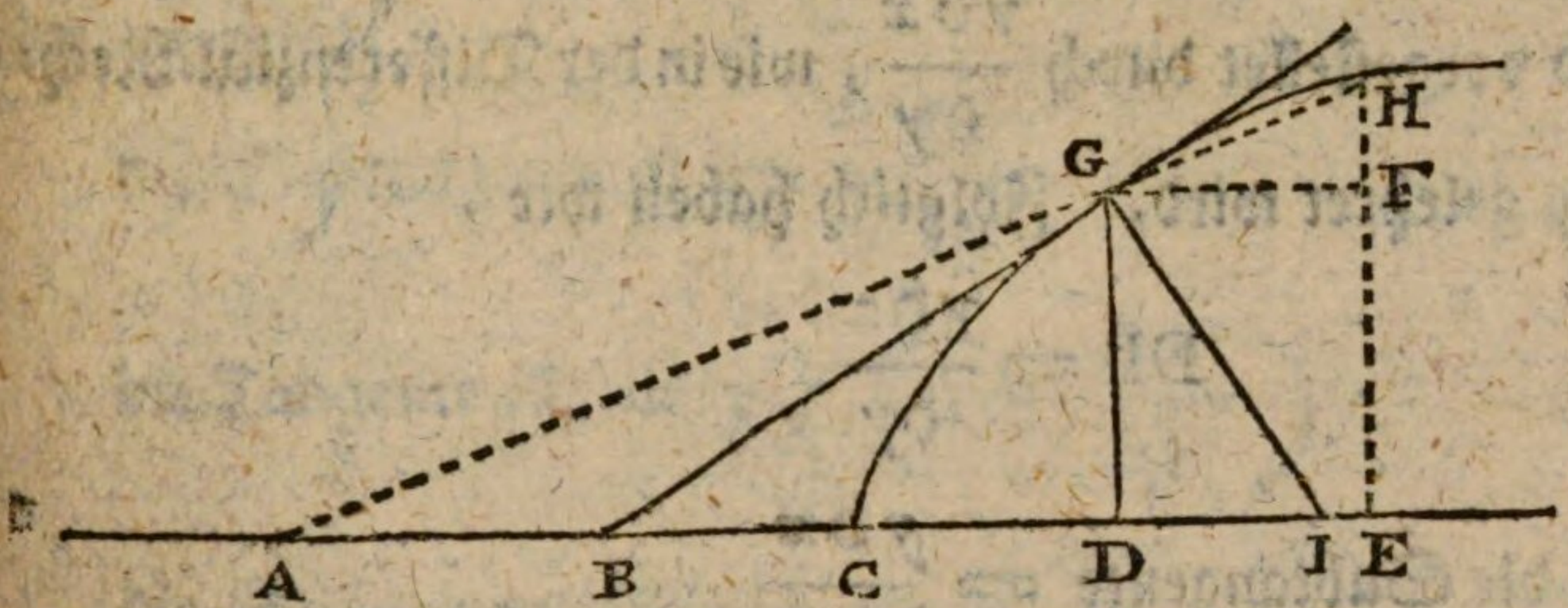
§. 2.

§. 2.

Aufgabe.

Die Subtangente, Tangente, Subnormal-Linie und Normal-Linie für jeden Punkt einer algebraischen Linie bestimmen.

Vorbereitung.



Es sey GB die Tangente für einen Punkt G der krummen Linie, GD die Applikate, CD die Abzisse, BD die Subtangente. Es sey EH eine andere Applikate, GF parallel mit DE. Es werde HA durch die Enden beider Applikaten gezogen. Nun ist $CD = x$, $DG = y$; DE oder GF ist $= \triangle x$, das heißt, es ist der Zuwachs der Abzisse x; ferner ist $HF = \triangle y$, das heißt, HF ist der Zuwachs der Applikate. Die Aehnlichkeit der Dreiecke giebt

$$HF, FG :: GD, DA$$

$$\triangle y, \triangle x :: y, DA$$

daher ist $$DA = \frac{y \triangle x}{\triangle y},$$

Nun stellet euch vor, daß die Applikate EH sich der DG je mehr und mehr nähere, und daß folglich $\triangle y$ und $\triangle x$ je mehr und mehr abnehmen. Zu gleicher Zeit wird sich DA dem Werthe der Subtangente DB je mehr und mehr nähern, ohne jedoch der DB völlig gleich zu wer-

den, so lange HF und GF nemlich $\triangle y$ und $\triangle x$ wirkliche Größen sind. Es ist also DB die Gränze der abnehmenden DA. Es war aber $DA = \frac{y \triangle x}{\triangle y}$. Sind nun zwei veränderliche Größen gleich, so sind ihre Gränzen gleich. Die Gränze der DA war DB. Die Gränze von $\frac{y \triangle x}{\triangle y}$ wird vorgestellet durch $\frac{y \partial x}{\partial y}$, wie in der Differenzial-Rechnung gelehret wird. Folglich haben wir

$$DB = \frac{y \partial x}{\partial y}$$

oder die Subtangente $= \frac{y \partial x}{\partial y}$

Aus diesem allgemeinen Ausdrucke für die Subtangente, läßt leicht die Tangente selbst finden; denn es ist

$$BG = \sqrt{(DG^2 + BD^2)}$$

$$BC = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 \partial x^2}{\partial y^2}\right)}$$

$$BG = y\sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$$

Die Subnormal-Linie kann auf folgende Art gefunden werden. Es sey GI die Normal-Linie, so ist BGI ein rechtwinkliches Dreieck, und GD ist senkrecht auf der Hypotenuse BI. Folglich ist

$$BD, DG :: DG, DI$$

$$\frac{y \partial x}{\partial y}, y :: y, DI$$

daher $DI = y^2 : \frac{y \partial x}{\partial y} = \frac{y \partial y}{\partial x}$

Zulezt

Zulezt iſt $GI = \sqrt{(DG^2 + DI^2)}$

$$GI = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 \delta y^2}{\delta x^2}\right)}$$

$$GI = y\sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$$

Auflöſung. Man bediene ſich der gefundenen Formeln, nemlich

die Subtangente iſt $= y\frac{\delta x}{\delta y}$

die Tangente iſt $= y\sqrt{\left(1 + \frac{\delta x^2}{\delta y^2}\right)}$

die Subnormal-Linie iſt $= y\frac{\delta y}{\delta x}$

die Normal-Linie iſt $= y\sqrt{\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}$

Man differenzire die Gleichung, welche die Natur der gegebenen Linie ausdrücket. Aus der Differenzial-Gleichung ziehe man die Werthe von $\frac{\delta x}{\delta y}$, $\frac{\delta x^2}{\delta y^2}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta y^2}{\delta x^2}$, und ſetze dieſelben in die Formeln; ſo werden die verlangten Linien in Funkzionen von x und y heraus kommen. Will man bloße Funkzionen von x haben, ſo muß man y in einer ſolchen Funkzion ausdrücken, und dieſelbe ſubſtituiren; oder umgekehrt, wenn man Funkzionen von y haben will, ſo muß man den Werth von x in einer Funkzion des y ſubſtituiren.

Exempel I. Es ſey die gegebene Linie eine Parabel, ſo iſt die Gleichung derſelben

$$y^2 = px$$

daher $2y\delta y = p\delta x$

Daraus

daraus ziehet man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}, \text{ und } \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{4y^2}{p^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}, \text{ und } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$$

Substituiret man diese Werthe in die Formeln, so bekömmt man

$$\text{Subtangente} = y\,\frac{dx}{dy} = y.\,\frac{2y}{p} = \frac{2y^2}{p}$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y.\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}$$

$$= y\sqrt{\frac{p^2+4y^2}{p^2}}$$

$$= \frac{y}{p}\sqrt{(p^2+4y^2)}$$

$$\text{Subnormal-Linie} = y\,\frac{dy}{dx} = y.\,\frac{p}{2y} = \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{Normal-Linie} = y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{4y^2}\right)}$$

$$= y\sqrt{\left(\frac{4y^2+p^2}{4y^2}\right)}$$

$$= y\sqrt{\left(\frac{y^2+\frac{1}{4}p^2}{y^2}\right)}$$

$$= \sqrt{(y^2+\tfrac{1}{4}p^2)}$$

$$= \sqrt{[y^2+(\tfrac{1}{2}p)^2]}$$

Will

Will man Funkzionen von x haben, so sezze man px anstatt y^2, und $\sqrt{px}$ anstatt y, dann kömmt

$$\text{Subtangente} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)} = \sqrt{px}\sqrt{\left(1+\frac{4px}{p^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(px+\frac{4p^2x^2}{p^2}\right)}$$

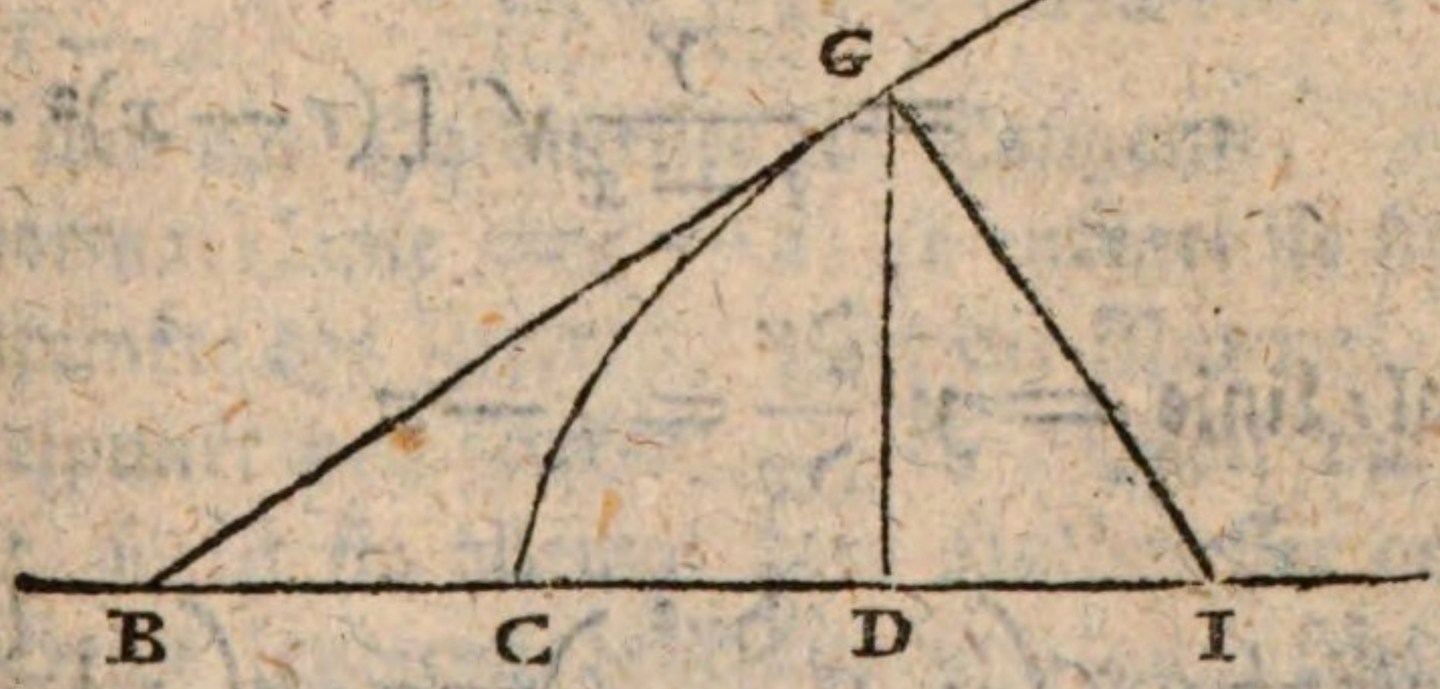
$$= \sqrt{(px+4x^2)}$$

$$\text{Subnormal-Linie} = \tfrac{1}{2}p$$

$$\text{Normal-Linie} = \sqrt{(y^2+\tfrac{1}{4}p^2)} = \sqrt{(px+\tfrac{1}{4}p^2)}$$

Hieraus erfährt man zugleich zwei nüzliche Lehrsäzze, nemlich 1) daß die Subtangente in der Parabel allemal der doppelten Abzisse gleich ist, weil nemlich gefunden worden daß die Subtangente $= 2x$, II) daß die Subnormal-Linie in der Parabel allemal eine beständige Größe ist, die dem halben Parameter gleich ist, nemlich $= \frac{1}{2}p$.

Es ist demnach sehr leicht die Tangente für einem Punkt G der Parabel zu ziehen. Man mache $BD = 2CD$



oder $CB = DC$, und ziehe die Tangente BG. Oder, man mache DI = dem halben Parameter, ziehe IG, und die Tangente GB senkrecht auf IG.

Hier

Hier siehet man, wie die Differenzial-Rechnung dasjenige bestätiget, was schon auf eine andere Art gefunden worden. (II. H. §. 3 und 4.)

Exempel II. Es sey die gegebene Linie ein Zirkel, so ist, wenn der Durchmesser $= 2r$

$$y^2 = 2rx - x^2$$

$$2y\,dy = 2r\,dx - 2x\,dx$$

$$y\,dy = r\,dx - x\,dx$$

$$y\,dy = (r-x)\,dx$$

daher $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x}$ und $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{y^2}{(r-x)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}$ und $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(r-x)^2}{y^2}$

Substituiret man diese Werthe in die Formeln, so kömmt

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{r-x}$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{y^2}{(r-x)^2}\right)}$$

$$= \frac{y}{r-x}\sqrt{[(r-x)^2+y^2)]}$$

$$\text{Subnormal-Linie} = y\frac{dy}{dx} = r-x$$

$$\text{Normal-Linie} = y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = y\sqrt{\left(1+\frac{(r-x)^2}{y^2}\right)}$$

$$= \sqrt{[y^2+(r-x)^2]}$$

Setzet

Setzet man nun $\sqrt{(2rx - x^2)}$ anstatt y und $2rx - x^2$ anstatt y^2, so kömmt

$$\text{Subtangente} = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx - x^2}{r-x} = \frac{(2r-x)x}{r-x}$$

$$\text{Tangente} = \frac{y}{r-x}\sqrt{[(r-x)^2 + y^2]}$$

$$= \frac{y}{r-x}\sqrt{[r^2 - 2rx + x^2 + 2rx - x^2]}$$

$$= \frac{y}{r-x}\sqrt{r^2} = \frac{ry}{r-x} = \frac{r\sqrt{(2rx - x^2)}}{r-x}$$

$$\text{Subnormal-Linie} = r - x$$

$$\text{Normal-Linie} = \sqrt{[y^2 + (r-x)^2]}$$

$$= \sqrt{(2rx - x^2 + r^2 - 2rx + x^2)}$$

$$= \sqrt{r^2} = r$$

Dieses giebt uns folgende Lehrsätze. I) Weil die Subtangente $= \frac{(2r-x)x}{r-x}$, so verhält sich die Entfernung der Applikate vom Mittelpunkte zur einen Abzisse (x), wie die andere ($2r - x$) zur Subtangente. II) Weil die Tangente $= \frac{ry}{r-x}$, so verhält sich die besagte Entfernung zur Applikate wie der Halbmesser zur Tangente. III) Weil die Subnormal-Linie $= r - x$, so endiget sie sich allemal im Mittelpunkte des Zirkels, oder die Normal-Linie trift den Mittelpunkt des Zirkels. IV) Weil die Normal-Linie $= r$, so ist sie allemal dem Halbmesser des Zirkels gleich. Beide letzteren Lehrsätze sind auch schon aus der gemeinen Geometrie bekannt.

Exem-

Exempel III. Die Gleichung für die Ellipse und Hyperbel ist:

$$y^2 = px \mp \frac{p}{a} x^2$$

oder $ay^2 = apx \mp px^2$

daher $2aydy = apdx \mp 2pxdx$

$2ay.dy = (ap \mp 2px)dx$

daher ist $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{ap \mp 2px}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2ay}$$

Folglich bekommen wir

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} = \frac{2ay^2}{ap \mp 2px}$$

$$\text{Subnormal-Linie} = y\frac{dy}{dx} = \frac{ap \mp 2px}{2a} = \frac{p(a \mp 2x)}{2a}$$

$$= \frac{p(\frac{1}{2}a \mp x)}{a}$$

Der Ausdruck der Subnormal-Linie ist schon eine bloße Funkzion von x und beständigen Größen. Soll auch die Subtangente eine Funkzion von x werden, so setze man anstatt ay^2 dessen Werth $apx \mp px^2$, dann kömmt

$$\text{Subtangente} = \frac{2apx \mp 2px^2}{ap \mp 2px}$$

$$= \frac{2ax \mp 2x^2}{a \mp 2x}$$

$$= \frac{2(a \mp x).x}{a \mp 2x}$$

$$= \frac{(a \mp x).x}{\frac{1}{2}a \mp x}$$

Aus

Aus diesem letzten Ausdrucke erhellet, daß die Differenz oder Summe der halben Axe und der Abzisse, sich verhält zur Differenz oder Summe der ganzen Axe und der Abzisse, wie die Abzisse zur Subtangente. Die Differenz ist für die Ellipse, und die Summe für die Hyperbel. Das nemliche ist schon auf eine andere Art bewiesen worden (II Hauptst. §. 4.)

Zugleich kann man bemerken, daß der Parameter hier gar nicht in Betrachtung kömmt. Wenn also über der nemlichen großen Axe mehrere Ellipsen oder Hyperbeln mit verschiedenen Parametern beschrieben sind, so haben sie für einerlei Abzisse alle einerlei Subtangente, oder die Tangenten treffen alle den nemlichen Punkt der Axe Und da die Ellipse auch ein Zirkel werden kann, wenn der Parameter der Axe gleich wird, so trift auch die Tangente des Zirkels den selbigen Punkt, wenn nemlich der Zirkel auf der großen Axe der Ellipse beschrieben ist, und wenn die berührten Punkte des Zirkels und der Ellipse zur nemlichen Abzisse gehören.

Man braucht also nur die Tangente des Zirkels zu ziehen, um die Tangente des zur nemlichen Abzisse gehörigen Punktes der Ellipse zu bekommen.

Die Länge der Tangenten und Normal-Linien bei der Ellipse und Hyperbel durch die Rechnung zu bestimmen, wäre hier überflüßig, und würde nur einen unnützen Platz einnehmen. Ein Anfänger, der sich üben will, kann selbst diese Linien berechnen.

Exempel IV. In der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$x\,y = a^2$$

daher $x\,\partial\,y + y\,\partial\,x = o$

$$x\,\partial\,y \ldots = -y\,\partial\,x$$

daher $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{x}{y}$

und $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y}{x}$

Deswegen ist

die Subtangente $= y\frac{\partial x}{\partial y} = -x$

die Subnormal-Linie $= y\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y^2}{x}$

Hier deuten die Zeichen — an, daß diese Linien nicht in derselben Richtung genommen werden können, als in der Formel vorausgesetzet worden, nemlich die Subtangente rückwärts nach dem Ursprunge der Abzissen zu, und die Subnormal-Linie vorwärts, vom Ursprunge weg; sondern, daß diese Richtung hier ganz entgegengesetzet ist, wie man es auch leicht einsehen wird, wenn man zu einem Punkte der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten die Tangente ziehen will.

Uebrigens sehen wir, daß hier die Subtangente der Abzisse gleich ist, und daß die Subnormal-Linie die dritte Proporzional-Größe ist zur Abzisse und zur Applikate.

Weil wir in diesem Hauptstücke nur eigentlich von krummen Linien mit rechtwinklichen Koordinaten handeln, so haben wir dieses vierte Exempel bloß auf die gleichseitige Hyperbel eingeschränket, wo die Koordinaten senkrecht auf einander stehen. Jedoch trift die berechnete Subtangente auch bei anderen Hyperbeln ein, wie man es am gehörigen Orte sehen wird.

Exempel *V*. In der Zissoïde ist (VI. H. §. 3)

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

oder

oder $2ry^2 - xy^2 = x^3$

oder $2ry^2 \ldots = x^3 + xy^2$

daher $4ry\,\delta y \ldots = 3x^2\delta x + y^2\delta x + 2xy\delta y$

oder $(4ry - 2xy)\delta y = (3x^2 + y^2)\delta x$

daher ist $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2y(2r-x)}{3x^2+y^2}$

und $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{3x^2+y^2}{2y(2r-x)}$

Also bekömmt man

Subtangente $= y\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2y^2(2r-x)}{3x^2+y^2}$

Subnormal-Linie $y\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{3x^2+y^2}{2(2r-x)}$

Substituirt man anstatt y^2 dessen Werth $\frac{x^3}{2r-x}$, so kömmt

Subtangente $= \frac{2x^3}{3x^2 + \frac{x^3}{2r-x}} = \frac{2x}{3 + \frac{x}{2r-x}}$

$= \frac{2x(2r-x)}{3(2r-x)+x}$

$= \frac{2x(2r-x)}{6r-2x}$

$= \frac{x(2r-x)}{3r-x}$

$$\text{Subnormal-Linie} = \frac{3x^2 + \frac{x^3}{2r-x}}{2(2r-x)}$$

$$= \frac{3x^2(2r-x)+x^3}{2(2r-x)^2}$$

$$= \frac{6rx^2-2x^3}{2(2r-x)^2}$$

$$= \frac{3rx^2-x^3}{(2r-x)^2}$$

$$= \frac{(3r-x)x^2}{(2r-x)^2}$$

Exempel *VI.* Es ist in der Konchoïde: (VI. H. §. 5)

$$y^2 = \frac{(b \pm x)^2 (a^2-x^2)}{x^2}$$

$$\text{oder} \quad y = \frac{(b \pm x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

$$\text{oder} \quad y = x^{-1}(b \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{daher} \quad dy = -(b \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2}\,dx$$
$$\pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$-(b \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -(b \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2} \pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - (b \pm x)$$
$$(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-(b \pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^{-2} \pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} - (b \pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Da

Daher wird die Subnormal: Linie

$$y\frac{dy}{dx} = -(b\mp x)^2(a^2-x^2).x^{-3}$$

$$\pm x^{-2}(a^2-x^2)(b\pm x)$$

$$-(b\pm x)^2 x^{-1}$$

$$\text{oder } y\frac{dy}{dx} = -\frac{(b\pm x)^2(a^2-x^2)}{x^3} \pm \frac{(b\pm x)(a^2-x^2)}{x^2} - \frac{(b\pm x)^2}{x}$$

$$= \frac{b\pm x}{x}\left[-\frac{(b\pm x)(a^2-x^2)}{x^2} \pm \frac{(a^2-x^2)}{x} - \frac{b\pm x}{1}\right]$$

$$= \frac{b\pm x}{x}\left[\frac{-(b\pm x)(a^2-x^2)\pm(a^2-x^2)x-(b\pm x)x^2}{x^2}\right]$$

$$= \frac{b\pm x}{x}\left[\frac{-a^2b\mp x^3}{x^2}\right]$$

Um diesen letzten Ausdruck zu erhalten, muß man den Zähler des vorhergehenden Bruchs entwickeln und verkürzen.

Die Subtangente wird

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{x^{-1}(b\pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{-(b\pm x)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}x^{-2}\pm x^{-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-(b\pm x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Multiplizire Zähler und Nenner mit x^2 und mit $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, so kömmt

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{x(b\pm x)(a^2-x^2)}{-(b\pm x)(a^2-x^2)\pm x(a^2-x^2)-(b\pm x)x^2}$$

Entwickele und verkürze die Sätze des Nenners, so kömmt

$$y\frac{dx}{dy} = \frac{x(b\pm x)(a^2-x^2)}{-a^2b\pm x^3}$$

Exempel VII. Die Gleichung für die Parabeln von allen Ordnungen ist (VI. H. § 9.)

$$y^m = a^{m-n} x^n$$

folglich ist $my^{m-1} dy = n a^{m-n} x^{n-1} dx$

daher ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{my^{m-1}}{n a^{m-n} x^{n-1}}$$

$$\text{folglich } y \frac{dx}{dy} = \frac{my^m}{n a^{m-n} x^{n-1}}$$

oder weil $y^m = a^{m-n} x^n$

$$\text{so ist } y \frac{dx}{dy} = \frac{m a^{m-n} x^n}{n a^{m-n} x^{n-1}}$$

$$\text{oder } y \frac{dx}{dy} = \frac{mx}{n}$$

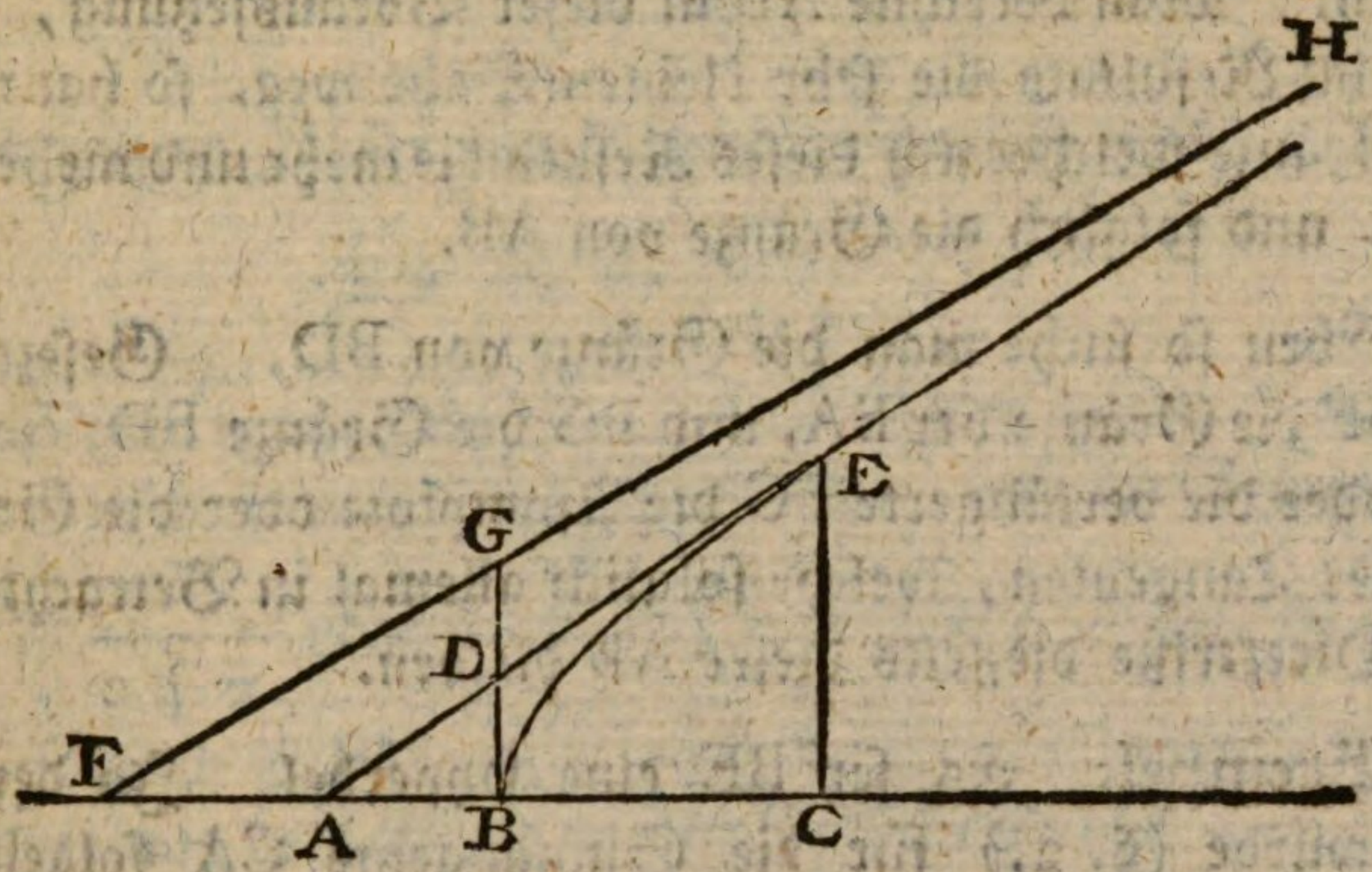
In der gemeinen Parabel ist $\frac{m}{n} = \frac{2}{1} = 2$, also ist die Subtangente $= 2x$, wie schon oben im ersten Exempel gefunden worden.

Anmerkung. Vorige Exempel sind mehr als zureichend, um die Formeln zu erläutern. Wer sich üben will, kann noch die allgemeinen Gleichungen für Zirkel, Ellipsen ꝛc. von höheren Ordnungen vornehmen (VI. H. § 9).

§. 3.

Die Lage der Asymptote einer krummen Linie bestimmen.

Auflösung. Was eine Asymptote ist, haben wir schon bei Gelegenheit der Hyperbel (1. H. §. 32 u. 33.) erkläret. Hier wollen wir lehren, wie die Lage der Asymptote, wenigstens in einigen Fällen, durch die Rechnung bestimmet werden kann.



Gesezt die Abzisse BC und die Applikate CE werden immer größer und größer, so wird die Tangente AE die krumme Linie BE immer weiter und weiter von ihrem Anfange B berühren, und die Asymptote, welche die krumme Linie gar nicht berühret, ist die Gränze dieser zunehmenden Tangente. Zugleich wächst der Theil AB der Subtangente, welcher ausserhalb der krummen Linie lieget, desgleichen auch die BD, welche vom Ursprunge der Abzissen bis an die Tangente über der Direktrize AC senkrecht gezogen ist; und beide Linien AB, BD kommen je mehr und mehr einem gewissen Werthe näher, der nicht mehr die Lage der Tangente, sondern der Asymptote bestimmet. Kann man also nur die Gränzen dieser wachsenden Linien AB und BD bestimmen, so hat man die Lage der Asymptote.

Gesezt man habe den Ausdruck der AB in einer Funkzion von x gefunden, so nehme man in dieser Funkzion an, es sey x geworden $= \frac{1}{\omega}$, wo wir unter ω eine sehr kleine, und folglich unter $\frac{1}{\omega}$ eine sehr große Quantität verstehen. Man berechne AB in dieser Voraussezung, und lasse im Resultate die sehr kleinen Sätze weg, so hat man die Gränze welcher sich dieses Resultat je mehr und mehr nähert, und folglich die Gränze von AB.

Eben so suche man die Gränze von BD. Gesezt es sey BF die Gränze der BA, und BG die Gränze BD, so ist FH oder die verlängerte FG die Asymptote oder die Gränze aller Tangenten, welche folglich allemal in Betrachtung der Direktrize diesseits dieser AB bleiben.

Exempel. Es sey BE eine Hyperbel. In derselben wurde (§. 2.) für die Subtangente CA folgender Werth gefunden

$$CA = \frac{(a+x)x}{\frac{1}{2}a+x}$$

$$\text{oder } CA = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x}$$

Davon nimm ab $BC = x$, so bleibet

$$BA = \frac{ax+x^2}{\frac{1}{2}a+x} - x$$

$$= \frac{ax+x^2-\frac{1}{2}ax-x^2}{\frac{1}{2}a+x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$$

$$= \frac{ax}{a+2x}$$

Gesezt

Gesezt nun, wie kurz vorher gesaget worden, es sey $x = \frac{1}{\omega}$, so ist

$$BA = \frac{a.\frac{1}{\omega}}{a + 2\frac{1}{\omega}}$$

Multiplizire Zähler und Nenner mit ω, so wird

$$BA = \frac{a}{a.\omega + 2}$$

Wenn nun ω ein sehr kleiner Bruch wird, so nähert sich $a\omega$ je mehr und mehr dem Nichts, und die Gränze von BA ist $\frac{a}{0+2}$ oder $\frac{a}{2}$ oder $\frac{1}{2}a$. Diese Gränze ist aber BF, folglich ist $BF = \frac{1}{2}a$, das heißt, die Asymptote entspringet aus dem Mittelpunkte der Hyperbel.

Es ist ferner

AC zu CE wie AB zu BD

$$\frac{ax + x^2}{\frac{1}{2}a + x}, \sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)} :: \frac{ax}{a + 2x}, BD$$

multiplizire den 1ten und dritten Satz mit $a + 2x$

$$(2ax + 2x^2), \sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)} :: ax, BD$$

Dividire den 1ten und dritten durch x

$$(2a + 2x), \sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)} :: a, BD$$

$$\text{Daher } BD = \frac{a\sqrt{(px + \frac{p}{a}x^2)}}{2a + 2x}$$

Es sey $x = \frac{1}{\omega}$, so wird

$$BD = \frac{a\sqrt{\left(\frac{p}{\omega} + \frac{p}{a.\,\omega^2}\right)}}{2a + \frac{2}{\omega}}$$

$$= \frac{a\sqrt{\frac{p.\,\omega + p:a}{\omega^2}}}{2a + \frac{2}{\omega}}$$

$$= \frac{\frac{a}{\omega}\sqrt{\left(p.\,\omega + \frac{p}{a}\right)}}{2a + \frac{2}{\omega}}$$

$$= \frac{a\sqrt{\left(p.\,\omega + \frac{p}{a}\right)}}{2a\omega + 2}$$

Wird nun ω ein sehr kleiner Bruch, so nähert sich $p.\,\omega + \frac{p}{a}$ je mehr und mehr dem Werthe $o + \frac{p}{a}$ oder $\frac{p}{a}$, desgleichen nähert sich $2a\omega + 2$ dem Werthe 2, folglich, da BG die Gränze der BD ist, so ist

$$BG = \frac{a\sqrt{\frac{p}{a}}}{2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{p}{a}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap}$$

Es ist demnach BG die halbe mittlere Proporzional-Linie zwischen der Axe a und dem Parameter p, oder BG ist

ist die Hälfte der zweiten Axe (I. H. § 22.). Welches völlig mit demjenigen übereinstimmet, was oben von der Asymptote der Hyperbel gesaget worden. (I. H. § 32. 33.)

Anders. Die Gränze eines algebraischen Ausdruckes kann auch noch kürzer gefunden werden. Man lasse nemlich alle bloß beständige Größen weg, die zu x oder einem vielfachen von x addiret, oder von denselben subtrahiret sind. Wo zu einer Potenz von x eine niedrigere Potenz addiret oder wo von der höheren Potenz die niedrigere subtrahiret ist, da lasse man die niedrigere weg.

Zum Exempel die Gränze von

$$\frac{ax}{a+2x} \text{ ist } \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$$

die Gränze von

$$\frac{a\sqrt{\left(px+\frac{p}{a}x^2\right)}}{2a+x} \text{ ist } \frac{a\sqrt{\left(\frac{p}{a}x^2\right)}}{x} = \frac{ax\sqrt{\frac{p}{a}}}{x}$$

$$= a\sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{ap}$$

Dieses Verfahren läßt sich nicht nur deswegen rechtfertigen, weil die Resultate mit den vorigen übereinstimmen, sondern es hat auch in sich selbst seinen Grund. Im Bruche $\frac{ax}{a+2x}$ ist leicht einzusehen, daß, wenn x sehr groß ist, die beständige a sehr wenig im Divisor betragen wird, daß folglich der Quozient nicht viel verschieden seyn wird, wenn auch dieses a weggelassen wird. Je größer also x wird, desto kleiner wird der Unterschied. Jedoch kann $\frac{ax}{a+2x}$ nie dem $\frac{ax}{2x}$ gleich werden. Folglich ist

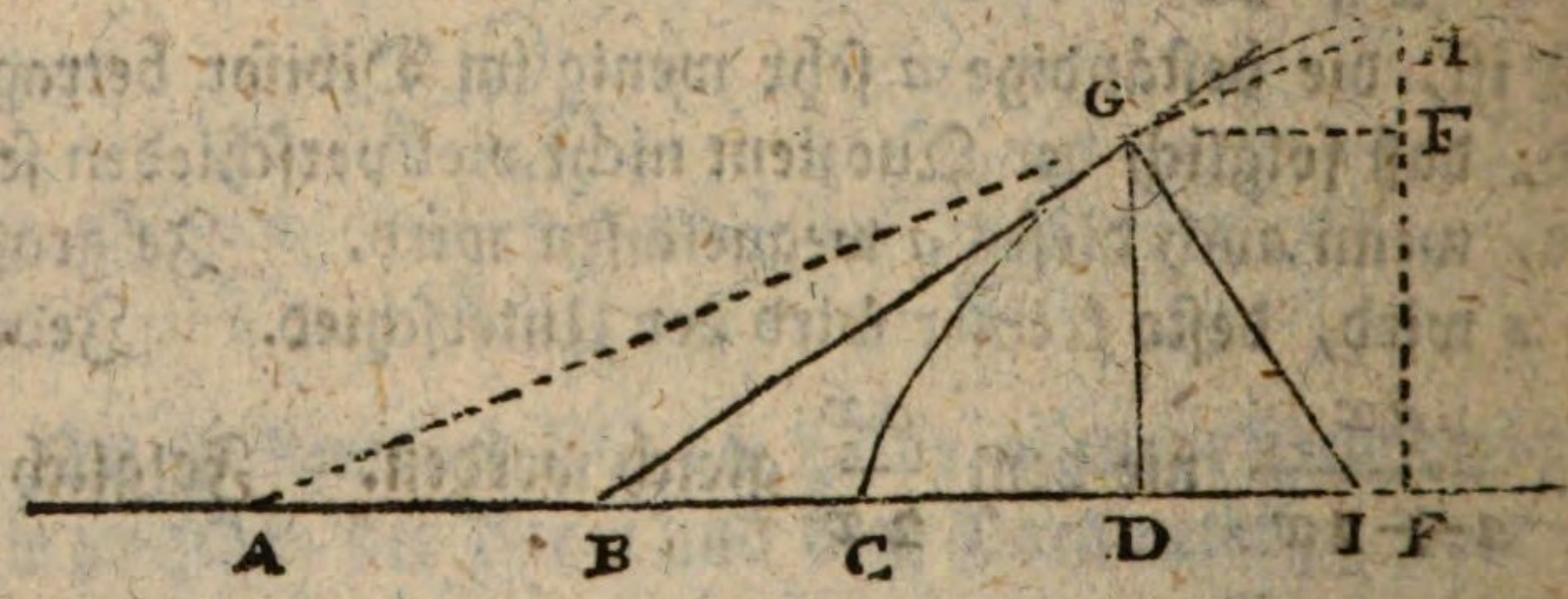
die

die lezte Größe die Gränze der ersteren. Eben so verhält es sich ohngefähr auch mit $p\,x + \frac{P}{a}x^2$. Wenn x ausserordentlich groß ist, so beträgt das bloße x, wenn es auch mit a multiplizirt ist, sehr wenig zur Vergrößerung des Quadrats x^2 oder dessen bestimmten Bruches $\frac{P}{a}x^2$. Also ist $a\,x + \frac{P}{a}x^2$ fast nicht mehr als $\frac{P}{a}\,x^2$ und $\sqrt{(p\,x + \frac{P}{a}x^2)}$ nähert sich immer mehr und mehr dem bloßen $\sqrt{\left(\frac{P}{a}x^2\right)}$. Auf eine ganz ähnliche Art müße man verfahren, wenn die wegzulassende Größen das Minuszeichen hätten. Z. E. Die Gränze von $\frac{\sqrt{\left(\frac{P}{a}x^2 - p\,x\right)}}{x-2a}$ würde seyn $\frac{\sqrt{\left(\frac{P}{a}x^2\right)}}{x}$ oder $\frac{x\sqrt{\frac{P}{a}}}{x} = \sqrt{\frac{P}{a}}$.

§. 4.

Aufgabe.

Den Winkel bestimmen, den die Tangente mit der Applikate oder mit der Direktrize bildet.



Auf=

Auflösung. Es ist HF, FG :: GD, DA. Es ist aber, wenn der Halbmesser in den trigonometrischen Tafeln $= r$ angenommen wird, und wenn $\mathfrak{T}$ die Tangente andeutet

$$\text{GD, DA} :: r, \mathfrak{T}(\angle \text{DGA})$$

Folglich ist HF, FG :: r, $\mathfrak{T}$DGA

$$\text{Daher ist } \mathfrak{T}\text{DGA} = \frac{r.\text{FG}}{\text{HF}} = \frac{r.\Delta x}{\Delta y}$$

Nähert sich nun der Punkt H je mehr und mehr dem Punkte G, so ist $\frac{r\,\partial x}{\partial y}$ die Gränze von $\frac{r.\Delta x}{\Delta y}$ und $\angle$ DGB ist die Gränze von $\angle$ DGA. Folglich ist

$$\mathfrak{T}\text{DGB} = \frac{r.\partial x}{\partial y}$$

Desgleichen ist GF, FH :: AD, DG

und AD, DG :: r, $\mathfrak{T}$DAG

daher GF, FH :: r, $\mathfrak{T}$DAG

$$\text{und } \mathfrak{T}\text{DAG} = \frac{r.\text{FH}}{\text{GF}} = \frac{r.\Delta y}{\Delta x}$$

Nimmt man die Gränzen, so ist

$$\mathfrak{T}\text{DBG} = \frac{r.\partial y}{\partial x}$$

Wird der Halbmesser in den Tafeln $= 1$ angenommen, so sind die Formeln noch einfacher. Es ist nemlich in diesem Falle

$$\mathfrak{T}\text{DGB} = \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\text{und } \mathfrak{T}\text{DBG} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Exempel. In der Parabel ist (§ 2.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p} = \frac{2\sqrt{px}}{p} = 2\sqrt{\frac{x}{p}} = \text{TDGB}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{p}{2\sqrt{px}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = \text{TDBG}$$

Wenn also der Parameter p und die Abzisse x in Zahlen ausgedrücket sind, so findet man ohne Schwierigkeit die Tangenten der Winkel, welche die Tangente der krummen Linie sowohl in der Applikate als auch mit der Are bildet, welche Winkel sich mit der Größe der Abzisse x verändern.

Die nemlichen Formeln können auf andere krummen Linien angewandt werden, wo dann die Ausdrücke der Tangenten der Winkel etwas verwickelter ausfallen werden.

§. 5.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Funkzion von x und y, welche die Subtangente oder die Subnormal-Linie ausdrücket, soll die Gleichung der krummen Linie gefunden werden.

Auflösung. Man setze die gegebene Funkzion gleich $y\frac{dx}{dy}$ für die Subtangente, oder gleich $y\frac{dy}{dx}$ für die Subnormal-Linie. So bekömmt man eine Differenzial-Gleichung; und wird diese integriret, so hat man die verlangte Gleichung zwischen x und y, welche die Natur der krummen Linie ausdrücket.

Exem-

Exempel I. Was ist das für eine krumme Linie, worinn die Subtangente allemal gleich ist $\frac{2y^2}{a}$? Setze

$$\frac{2y^2}{a} = y\frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{2y}{a} = \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$2y\partial y = a\partial x$$

man integrire, so kömmt

$$y^2 = ax + C$$

Sollen die Koordinaten so eingerichtet werden, daß sie zugleich anfangen, so muß $y = o$ werden wenn $x = o$, dann wird $o = o + C$ und $C = o$. Es bleibt also nur $y^2 = ax$, welches die gewöhnliche Gleichung für die Parabel ist.

Exempel II. Was ist das für eine krumme Linie, deren Subtangente ausgedrücket wird durch $\frac{2ay^2}{ap - 2px}$

Setze

$$\frac{2ay^2}{ap-2px} = \frac{y\partial x}{\partial y}$$

$$\frac{2ay}{ap-2px} = \frac{\partial x}{\partial y}$$

$$2ay\partial y = ap\partial x - 2px\partial x$$

Man integrire, so kömmt

$$ay^2 = apx - px^2 + C$$

oder $$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2 + \frac{C}{a}$$

Sollen

Sollen x und y zugleich $= o$ werden, so wird auch $C = o$, und es bleibt die gewöhnliche Gleichung für die Ellipse.

Exempel III. Was ist das für eine krumme Linie, die eine beständige Subnormal-Linie hat? Setze, die beständige Subnormal-Linie sey k, so muß seyn

$$k = y \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$k \partial x = y \partial y$$

$$C + kx = \tfrac{1}{2} y^2$$

$$2C + 2kx = y^2$$

Wenn x und y zugleich $= o$ werden, so ist $C = o$. Also ist die verlangte Linie wiederum eine Parabel, welche die doppelte Subnormal-Linie zum Parameter hat.

Exempel IV. Was ist das für eine krumme Linie deren Subnormal-Linie ausgedrücket wird durch $\frac{2ax - 3x^2}{3y}$?

Man setze

$$\frac{2ax - 3x^2}{3y} = \frac{y \partial y}{\partial x}$$

oder $2ax \partial x - 3x^2 \partial x = 3y^2 \partial y$

Man integrire, so kömmt

$$C + ax^2 - x^3 = y^3$$

welche Gleichung einer Linie von der dritten Ordnung, und von der Gattung des Zirkels ausdrücket. Soll $x = o$ zugleich $y = o$ geben, so wird $C = o$, und es bleibet $y^3 = ax^2 - x3$.

Anmer-

Anmerkung. Auf eine ähnliche Art könnte auch aus der Tangente oder Normal-Linie selbst die Natur der krummen Linie erforschet werden. Weil aber dabei Differenzial-Gleichungen vorkommen würden, welche etwas schwer zu integriren sind, so wollen wir den Anfänger nicht damit beläſtigen. Uebrigens merke man noch, daß dergleichen Aufgaben die umgekehrte Methode der Tangenten ausmachen, weil hier rückwärts aus der Tangente, oder Subtangente ꝛc auf die Beſchaffenheit der krummen Linie geſchloſſen wird. Im Gegenſatze gehören die vorhergehenden Aufgaben zur geraden Methode der Tangenten.

Neuntes Hauptstück.

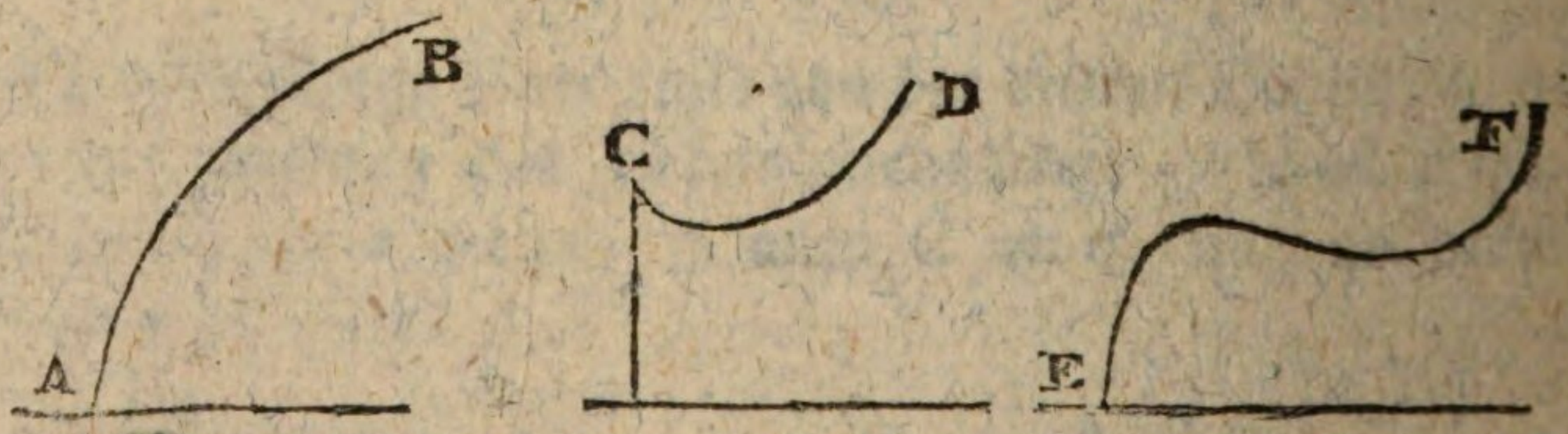
Von den Halbmessern der Krümmung und von den Evoluten, für rechtwinkliche Koordinaten.

§. 1.

Ein Bogen einer krummen Linie, ist jedweder beliebige Theil derselben; und eine Sehne ist eine gerade Linie deren beide Enden in der krummen Linie liegen, so daß sie folglich einen Bogen derselben abschneidet.

§. 2.

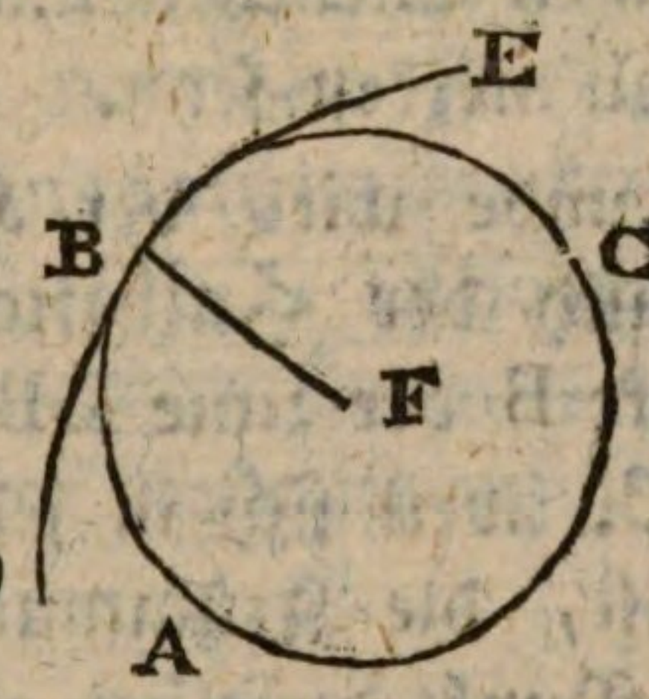
Eine krumme Linie ist konkav oder hohl, nach der Gegend zu wo die Sehnen liegen, die in derselben gezogen werden können. Hingegen ist sie konvex oder erhaben, nach der Gegend zu, wo keine Sehnen fallen. Da die krummen Linien fast immer zugleich mit ihrer Direktrisse betrachtet werden, so heißt insgemein eine konkave oder konvexe Linie so viel, als eine Linie die nach ihrer Direktrisse zu konkav oder konvex ist. Wenn ein Theil einer Linie konkav und der andere konvex ist, so wird sie konkavo-konvex genannt. In den hier beigefügten Figuren



ist AB gegen ihre Direktrise konkav, CD konvex, EF konkavo-konvex.

§. 3.

Ein Zirkel berühret oder küsset eine krumme Linie in einem Punkte, wenn der Umkreis durch diesen Punkt gehet, und übrigens der Zirkel groß genug ist, um daß zwischen ihm und der krummen Linie keine andere Zirkel-Linie gezogen werden könne, die durch den nemlichen Punkt gehe. Z. E. der Zirkel ABC küsset die krumme



Linie DBF im Punkte B, vorausgesetzet, daß zwischen BE und BC, oder zwischen BD und BA keine Zirkel-Linie mehr gezogen werden könne.

§. 4.

Eine Linie ist mehr oder weniger krumm, nachdem in einer gewissen Länge derselben die Tangenten mehr oder weniger ihre Richtung verändern. Der Zirkel allein hat eine vollkommen einförmige Krümmung, weil in demselben die Tangenten an den Enden gleicher Bogen, allemal gleiche Winkel mit einander machen, und also die Tangenten ihre Lage auf eine gleichförmige Art verändern. Größere Zirkel haben eine kleinere Krümmung, und kleire Zirkel eine größere Krümmung. Denn wenn man, in enem größeren und in einem kleineren Zirkel, Bogen von gleicher Länge nimmt, so verändert sich in jenem die Lage der Tangente weniger als in diesem.

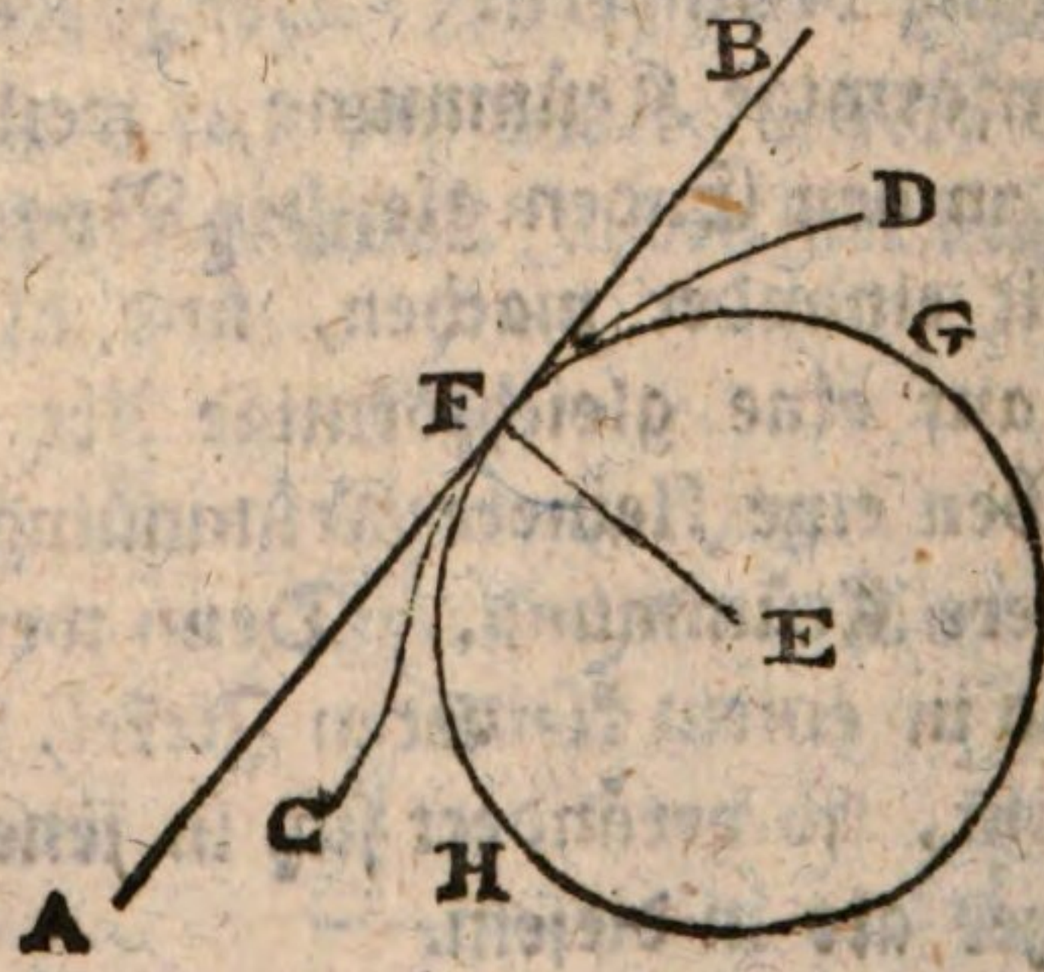
§. 5.

Weil die Krümmung der Zirkel-Linie einförmig ist, so wird sie gebrauchet, um die Krümmung anderer Linien zu bestimmen. Und weil der küssende Zirkel ABC (Fig. bei §2.) derjenige ist, dessen Krümmung der Krümmung der Linie DBE, in der Gegend des Punktes B am nächsten kömmt, so bestimmet der küssende Zirkel am richtigsten die Krümmung der gekützten Linie in der Gegend des Berührungs-Punktes. Ja, wenn man in der Gegend des Puuktes B einen kleinen Theil des Zirkels und der gekützten Linie nimmt, so wird zwischen beiden Theilchen und deren Krümmung fast kein Unterschied zu merken seyn.

Aus diesem Grunde wird der Halbmesser FB des küssenden Zirkels auch der Halbmesser der Krümmung für den Punkt B der Linie DBE genannt. Ich sage für den Punkt B, weil sich in jeder krummen Linie, die nicht ein Zirkel ist, die Krümmung beständig verändert, und also jeder Punkt derselben einen anderen Halbmesser der Krümmung erfordert.

§. 6.

Die Tangente für einen gegebenen Punkt einer krummen Linie ist zugleich die Tangente des küssenden Zirkels der die krumme Linie im nemlichen Punkte berühret, und der Halbmesser der Krümmung stehet allemal auf der Tangente senkrecht.



Die

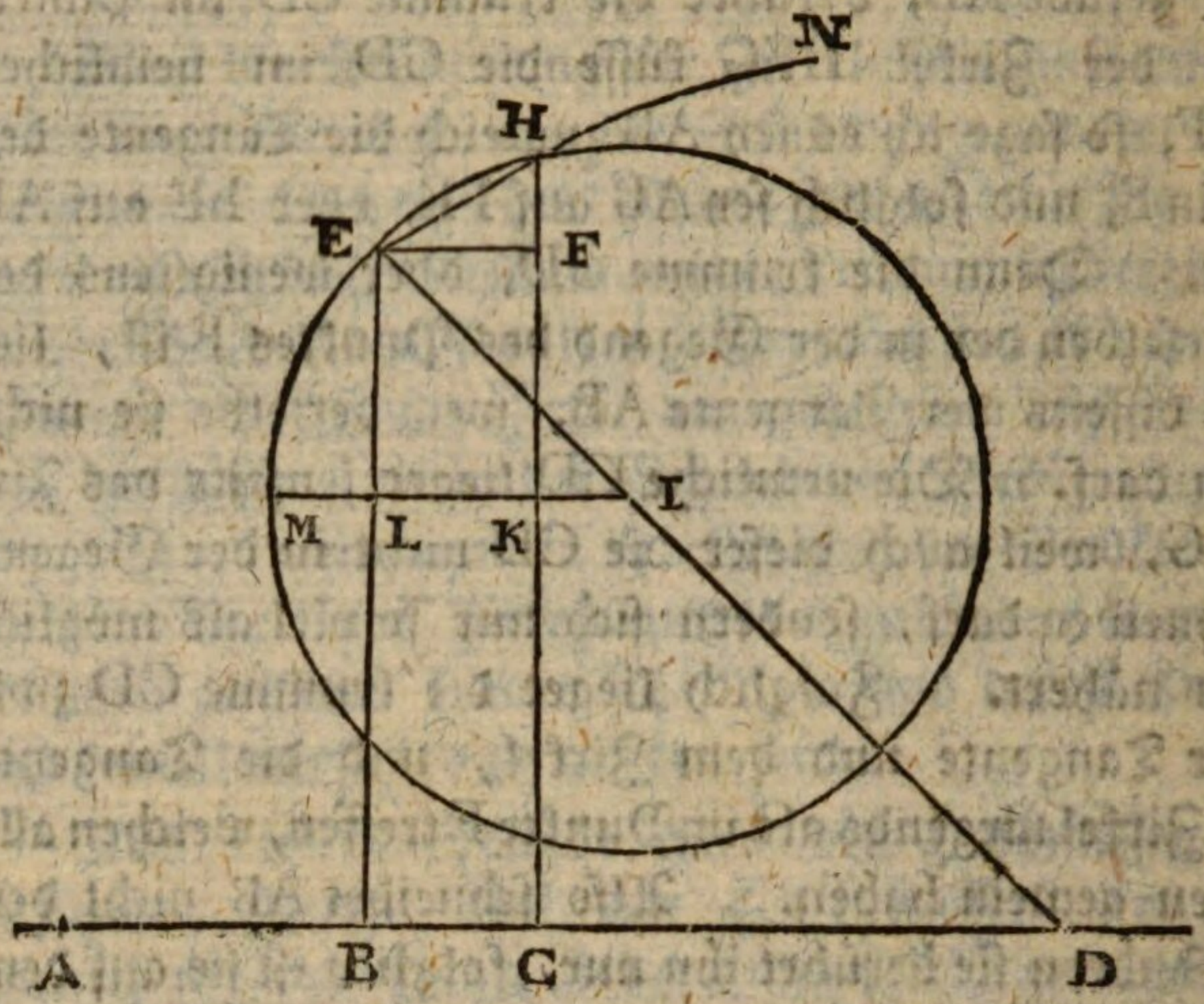
Die gerade AB, berühre die krumme CD im Punkte F, und der Zirkel HFG küsse die CD im nemlichen Punkte F, so sage ich es sey AB zugleich die Tangente des Zirkels in F, und folglich sey AB auf FE, oder FE auf AB senkrecht. Denn die krumme CD, oder wenigstens der Theil derselben der in der Gegend des Punktes F ist, lieget ganz disseits der Tangente AB, weil derselbe sie nicht schneiden darf. Die nemliche CD lieget jenseits des Zirkels HFG, weil auch dieser die CD nicht in der Gegend bei F schneiden darf, sondern sich nur so viel als möglich derselben nähert. Folglich lieget die krumme CD zwischen der Tangente und dem Zirkel, und die Tangente kann den Zirkel nirgends als im Punkte F treffen, welchen alle drei Linien gemein haben. Also schneidet AB nicht den Zirkel, sondern sie berührt ihn nur, folglich ist sie auf dem Halbmesser EF, oder dieser ist auf ihr, senkrecht.

§. 7.

Aufgabe.

Aus der algebraischen Gleichung einer krummen Linie, soll der Halbmesser der Krümmung für jeden beliebigen Punkt derselben gefunden werden.

(Siehe die folgende Figur.)



Vorbereitung.

Es sey EN die krumme Linie, AD deren Direktrisse, ED die Normal-Linie für den Punkt E, welche also auf der Tangente des Punktes E senkrecht stehet. Und da auch der Halbmesser der Krümmung auf der nemlichen Tangente senkrecht stehet, so muß der Mittelpunkt des küssenden Zirkels irgendwo in der Normal-Linie ED liegen. Wir nehmen anfänglich den willkührlichen Halbmesser EI etwas zu groß an, so daß die Peripherie des Zirkels die krumme Linie nicht weit von E noch in einem andern Punkte H treffe. Ziehe die Applikaten EB, HC. Ziehe auch IM und EF mit der Direktrisse parallel. Es sey der Ursprung der Abzissen im Punkte A, so ist $AB = x$ $BE = y$, und wenn HC und EB sehr nahe an einander sind, so ist $BC (= LK = EF) = dx$, $HF = dy$, $ED = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ (VIII. H. §. 2). Nun ist $HF = HK - EL = d(EL) = dy$. Es muß demnach seyn $d(EL) = dy$. Ferner ist

ED,

$$ED, EB :: EI, EL$$

$$y\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}, y :: EI, EL$$

$$\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}, 1 :: EI, EL$$

$$\text{daher ist } EL = \frac{EI}{\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}}$$

$$\delta(EL) = \delta\frac{EI}{\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}} = \frac{-EI\times\delta\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)}}{1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}}$$

Wenn wir annehmen, daß die erste Differenz von x, nemlich δx beständig bleibet, so ist

$$\delta\sqrt{\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)} = \delta\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{2\delta y\,\delta^2 y}{\delta x^2}$$

$$= \left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{\delta y\,\delta^2 y}{\delta x^2}$$

$$= \frac{\delta y\,\delta^2 y}{\delta x^2\left(1+\frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Setzen wir diesen Werth von $\delta\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ in die vorige Differenzial-Gleichung, so kömmt

$$\delta\frac{EI}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{-EI}{1+\frac{dy^2}{dx^2}} \times \frac{dy\,d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-EI.\,dy\,d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Und wie vorher gesaget worden, so muß diese Differenz der Differenz von y gleich seyn. Also ist

$$\frac{-EI.\,dy\,d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = dy$$

$$\frac{-EI\,d^2y}{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

$$-EI\,d^2y = dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$EI = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Je kleiner nun dx und dy angenommen werden, desto näher kömmt der Punkt H dem Punkte E, desto näher kömmt zugleich der Zirkel MEH dem küssenden Zirkel, und desto näher kömmt der Halbmesser EI dem Halbmesser der Krümmung. Da also $-\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ eigentlich

die

die Gränze von EI ausdrücket, diese aber der Halbmesser der Krümmung ist, so bedeutet solcher Ausdruck wirklich den Halbmesser der Krümmung. Wird demnach dieser Halbmesser durch r angedeutet, so ist

$$r = -\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{oder } r = -\frac{\partial x^2}{\partial^2 y}\left(1+\frac{\partial y}{\partial x^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$$

$$\text{oder } r = -\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$$

$$\text{oder } r = -\frac{\partial x^2+\partial y^2}{\partial^2 y}\cdot\frac{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}{\partial x}$$

$$\text{oder } r = -\frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x\,\partial^2 y} = \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{-\partial x\,\partial^2 y}$$

Das Zeichen — rühret daher, weil wir angenommen haben, daß die Linie konkav sey. In solcher konkaven Linie aber ist die zweite Differenz der Applikaten, das ist $\partial^2 y$, allemal eine negative Größe, weil der Unterschied der Applikaten immer kleiner und kleiner wird, obgleich die Applikaten selbst größer werden. Weil also $\partial^2 y$ negativ ist, und eigentlich $-\partial^2 y$ seyn solte, im Differenziren aber als positiv behandelt worden, so ersetzet das Minuszeichen den Irrthum, weil $-(-\partial^2 y) = +\partial^2 y$, wodurch dann der Halbmesser der Krümmung wirklich positiv wird.

Ist aber die krumme Linie konvex, so wird in der That $-\partial^2 y$ negativ, folglich auch der Halbmesser der Krümmung, das heißt, dieser Halbmesser fällt in Betrachtung der Direktrize jenseit der krummen Linie.

Auflösung.

Wenn der Halbmesser der Krümmung r ist, so hat man

$$r = \frac{dx^2}{-d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{oder } r = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}$$

wohl gemerket, daß dx beständig angenommen worden, und d^2y oder $d(dy)$ allemal als positiv behandelt wird, die Linie mag konkav oder konvex seyn.

Man ziehe also aus der Gleichung der krummen Linie die Werthe von $\frac{dx^2}{-d^2y}$, $\frac{dy^2}{dx^2}$, und setze dieselben in die erste Formel, oder man setze bloß die Werthe von dy und d^2y in die zweite Formel, so bekömmt man den Halbmesser der Krümmung in einer Funkzion von x und y. Will man bloß eine Funkzion von x haben, so muß man anstatt y dessen Werth setzen.

Exempel. Es sey die krumme Linie eine Parabel, so ist

$$y^2 = px$$

$$2ydy = pdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$$

Ferner

Ferner weil $2y\delta y = p\delta x$

so ist, wenn δx beständig ist

$$2y\delta^2 y + 2\delta y^2 = 0$$

$$y\delta^2 y + \delta y^2 = 0$$

$$\delta^2 y + \frac{\delta y^2}{y} = 0$$

$$\frac{\delta y^2}{y} = -\delta^2 y$$

und weil $\delta x^2 = \frac{4y^2\,\delta y^2}{p^2}$

so ist $\frac{\delta x^2}{-\delta^2 y} = \frac{4y^2\,\delta y^2}{p^2} : \frac{\delta y^2}{y}$

oder $\frac{\delta x^2}{-\delta^2 y} = \frac{4y^3}{p^2}$

Man setze die gefundenen Werthe von $\frac{\delta y^2}{\delta x^2}$ und $\frac{\delta x^2}{-\delta^2 y}$

in die Formel

$$r = -\frac{\delta x^2}{\delta^2 y}\left(1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

so kömmt $r = \frac{4y^3}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$r = \frac{4y^3}{p^2}\left(\frac{4y^2 + p^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$r = \frac{4y^3}{p^2} \times \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3}$$

$$r = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$$r = \frac{(4y^2 + p^2)\sqrt{(4y^2 + p^2)}}{2p^2}$$

Will

Will man eine Funkzion von x haben, so setze man px anstatt y^2, dann kömmt

$$r = \frac{(4px+p^2)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p^2}$$

$$r = \frac{(4x+p)\sqrt{(4px+p^2)}}{2p}$$

$$r = \frac{(4x+p)\sqrt{[p\times(4x+p)]}}{2p}$$

Daher ist:

$$2p,\ (4x+p) :: \sqrt{[p.\ (4x+p)]},\ r$$

$$p,\ (4x+p) :: \sqrt{p.(4x+p)},\ 2r$$

$$\tfrac{1}{2}p,\ (2x+\tfrac{1}{2}p) :: \tfrac{1}{2}\sqrt{p(4x+p)},\ r$$

$$\tfrac{1}{2}p,\ (2x+\tfrac{1}{2}p) :: \sqrt{(2x+\tfrac{1}{2}p)(\tfrac{1}{2}p)},\ r$$

Das heißt, der halbe Parameter verhält sich zur Summe des halben Parameters und der doppelten Abzisse, wie die mittlere Proporzional-Linie zwischen beiden besagten Grössen, zum Halbmesser der Krümmung.

Exempel. II. Es sey die gegebene Linie eine Ellipse, so ist in derselben

$$y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$$

Es sey der Kürze halben, die Zahl $\frac{p}{a} = m$, so ist

$$y^2 = px - mx^2$$

$$y = (px - mx^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \tfrac{1}{2}(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}(p - 2mx)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}(p - 2mx)$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \tfrac{1}{4}(px - mx^2)^{-1}(p - 2mx)^2$$

$$= \frac{(p - 2mx)^2}{4(px - mx^2)}$$

Ferner weil

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}(p - 2mx)$$

so ist, wenn dx beständig ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{4}(p - 2mx)^2(px - mx^2)^{-\frac{3}{2}} - m(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{-d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{4}(p - 2mx)^2(px - mx^2)^{-\frac{3}{2}} + m(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

folglich, wenn man den Bruch umkehret,

$$\frac{dx^2}{-d^2y} = \frac{1}{\tfrac{1}{4}(p - 2mx)^2(px - mx^2)^{-\frac{3}{2}} + m(px - mx^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

Multiplizire Zähler und Nenner mit $4(px - mx^2)^{\frac{3}{2}}$ so kömmt

$$\frac{dx^2}{-d^2y} = \frac{4(px - mx^2)^{\frac{3}{2}}}{(p - 2mx)^2 + 4m(px - mx^2)}$$

Ent-

Entwickelt man beide Theile des Nenners, und verkürzet sie, so wird er gleich p^2, also ist

$$\frac{dx^2}{-d^2y} = \frac{4(px-mx^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Setzet man diesen Werth und den Werth von $\frac{dy^2}{dx^2}$ in die Formel, so kömmt,

$$r = \frac{4(px-mx^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \times \left[1+\frac{(p-2mx)^2}{4(px-mx^2)}\right]^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$r = \frac{4(px-mx^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \times \left(\frac{4(px-mx^2)+(p-2mx)^2}{4(px-mx^2)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

oder

$$r = \frac{4(px-mx^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \times \frac{[4(px-mx^2)+(p-2mx)^2]^{\frac{3}{2}}}{8(px-mx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$r = \frac{1}{2p^2}[4(px-mx^2)+(p-2mx)^2]^{\frac{3}{2}}$$

Entwickelt man was in den Haken stehet, so kömmt $4px - 4mx^2 + p^2 - 4pmx + 4m^2x^2 = p^2 + 4(px-mx^2) - 4m(px-mx^2) = p^2 + 4(1-m)(px-mx^2)$. Also ist

$$r = \frac{[p^2+4(1-m)(px-mx^2)]^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

Und dieses ist also der Krümmungs-Halbmesser für die Ellipse.

Im Zirkel ist m oder $\frac{p}{a} = 1$, folglich $1-m = 0$. Dann wird

$$r = \frac{(p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{p^3}{2p^2} = \frac{p}{2}$$

Das

Das heißt, im Zirkel ist der Halbmesser der Krümmung dem halben Parameter, das ist, dem halben Durchmesser gleich, welches auch natürlich ist.

Uebrigens kann die gefundene Formel für die Ellipse auch also ausgedrücket werden

$$r = \frac{\left[p^2 + 4\left(1 - \frac{p}{a}\right)y^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

$$\text{oder } r = \frac{\left[p^2 + 4\left(\frac{a-p}{a}\right)y^2\right]}{2p^2}\sqrt{\left[p^2 + 4\left(\frac{a-p}{a}\right)y^2\right]}$$

$$\text{oder } r = \frac{p^2 + \frac{a-p}{a}(2y)^2}{2p^2}\sqrt{\left[p^2 + \frac{a-p}{a}(2y)^2\right]}$$

Exempel III. Es sey die Linie eine gleichseitige Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, so ist

$$xy = a^2$$
$$\text{oder } y = a^2 x^{-1}$$
$$\text{daher } \frac{dy}{dx} = -a^2 x^{-2}$$
$$\frac{dy^2}{dx^2} = +a^4 x^{-4} = \frac{a^4}{x^4}$$

Differenziret man zum zweiten male, und läßt dx unverändert, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2 x^{-3} = \frac{2a^2}{x^3}$$
$$\text{daher } \frac{dx^2}{d^2y} = \frac{x^3}{2a^2}$$
$$\frac{dx^2}{-d^2y} = -\frac{x^3}{2a^2}$$

Setzet man die gefundenen Werthe in die Formel, so wird

$$r = -\frac{x^3}{2a^2}\left(1+\frac{a^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$$r = -\frac{x^3}{2a^2}\left(\frac{x^4+a^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$r = -\frac{x3}{2a^2}\cdot\frac{(x^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}{x^6}$$

$$r = -\frac{(x^4+a^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^2x^3}$$

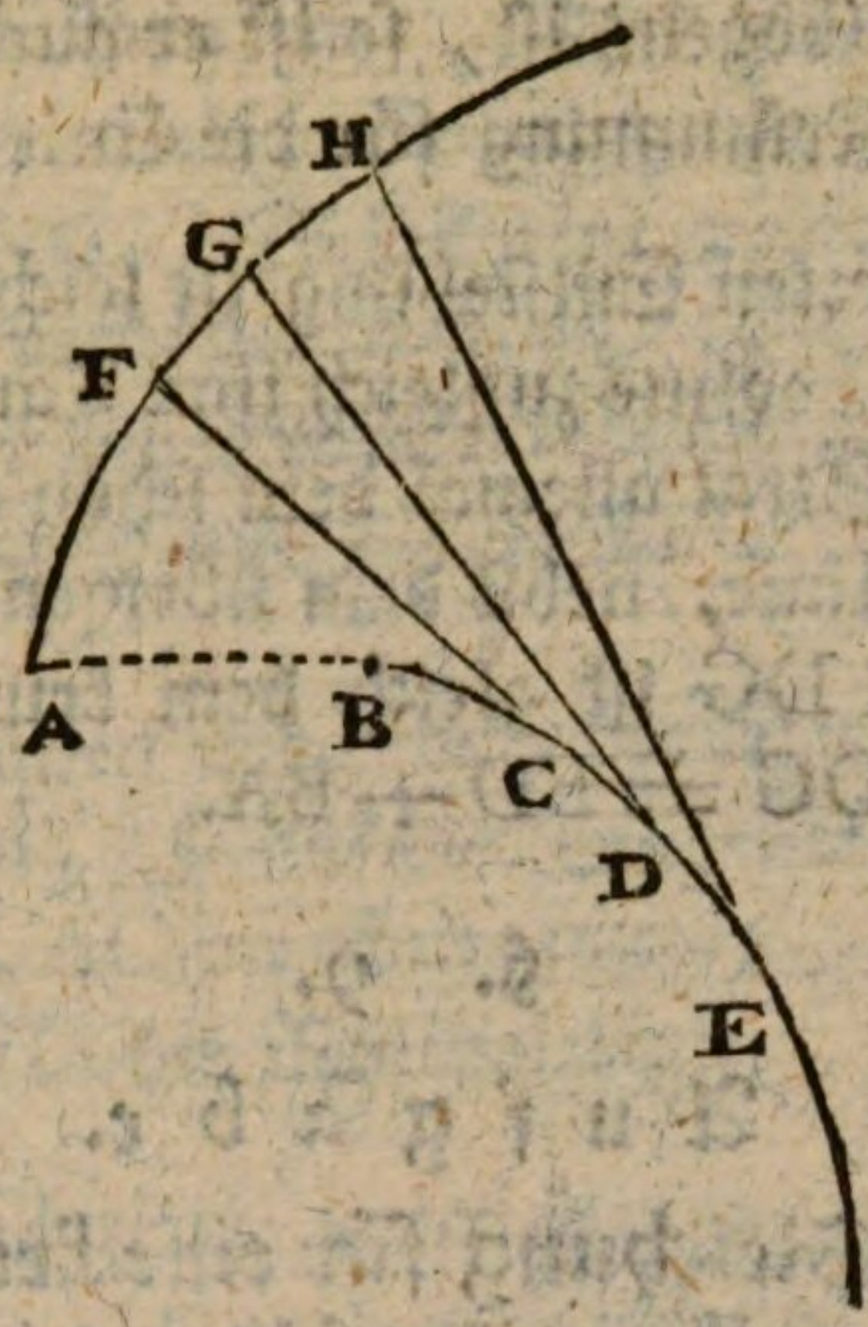
Das negative Zeichen giebt hier zu verstehen, daß die Linie gegen ihre Direktrisse konvex ist, und daß folglich der Halbmesser der Krümmung jenseit der krummen Linie fällt.

Anmerkung. So wie es eine umgekehrte Methode der Tangenten giebt (VIII. H. § 5.), so könnte man auch eine umgekehrte Methode der Krümmungs-Halbmesser einführen. Aber wegen der schweren Integrazionen die dabei vorfallen würden, pfleget man sie nicht zu gebrauchen.

§. 8.

Die Evolute einer krummen Linie ist eine andere krumme Linie, in welcher sich alle Halbmesser der Krümmung der ersteren Linie endigen, oder in welche alle Mittelpunkte der küssenden Zirkel fallen.

(Siehe die folgende Figur.)



Z. E. Es sey AH eine krumme Linie. Es seyen AB FC, GD, HE die Halbmesser der Krümmung für die Punkte A, F, G, H. So liegen die Enden B, C, D, E derselben oder die Mittelpunkte der küssenden Zirkel in einer krummen Linie BE, welche die Evolute der Linie AH genannt wird. Die Halbmesser der Krümmung AB, FC, GD, HE, werden auch die Strale (radii) der Evolute BE genannt.

Man kann sich auch vorstellen, es liege ein Faden ABCDE auf der konveren Seite der Evolute BE, so daß die Länge des Fadens die Länge der BE um einen gewissen Theil AB übertreffe, und man wickele den Faden von der Evolute ab; so wird dessen Ende A die krumme Linie AH beschreiben.

Denn gesezt, der Faden würde in B, C, D, E fest gehalten, so beschriebe sein anderes Ende lauter Zirkelbogen. Je näher nun die Punkte B, C, D, E beisammen liegen, desto mehr würden sich die Zirkelbogen der krummen Linie AH nähern, die also deren Gränze ist. Da nun der Faden allemal der Halbmesser der Krümmung je-

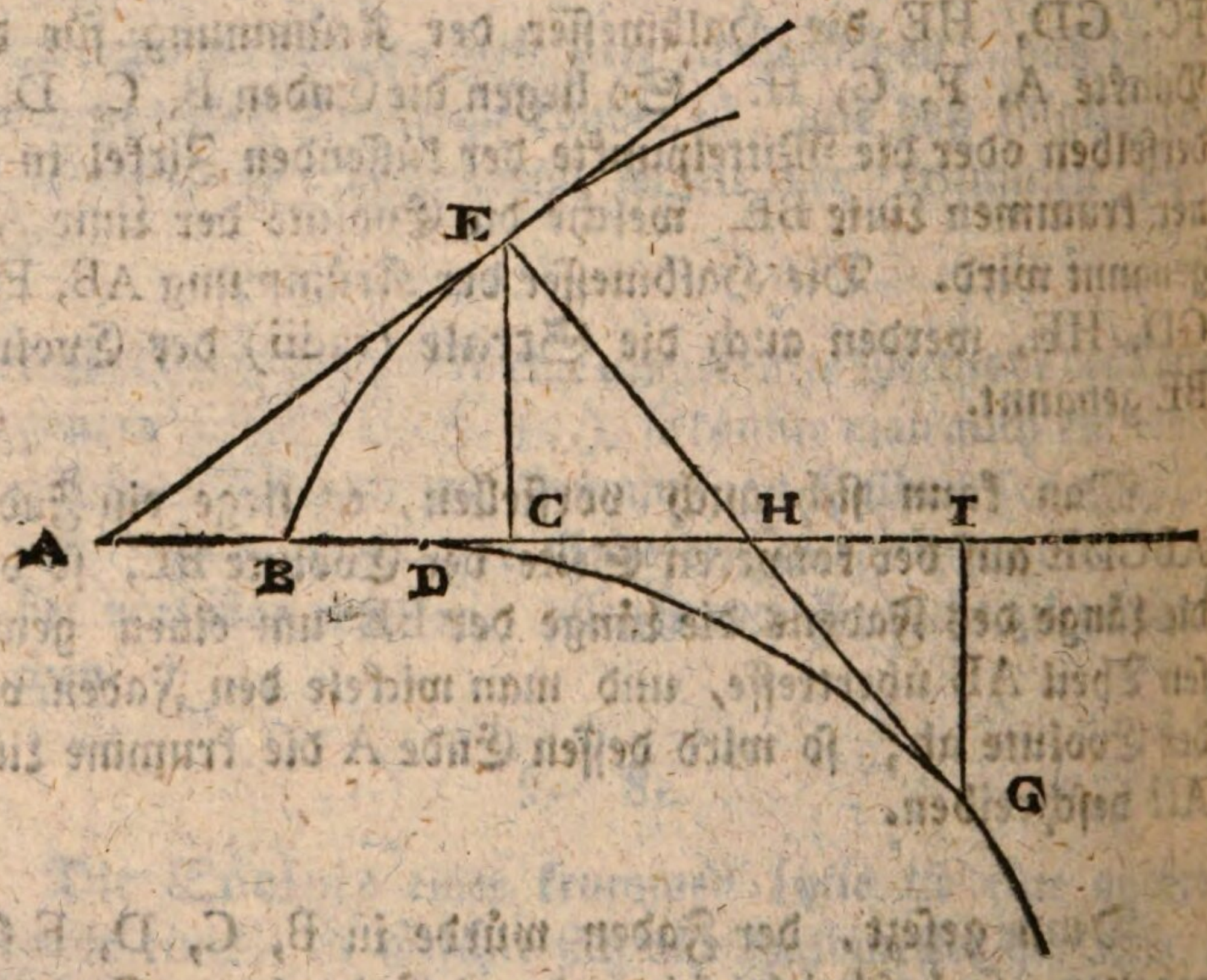
des kleinen Zirkelbogens ist, so ist er auch in jeder Lage der Halbmesser der Krümmung für die Linie AH.

Aus dieser lezten Entstehung ist leicht einzusehen, daß die Stralen der Evolute zugleich ihre Tangenten sind; und ferner, daß der Stral allemal dem schon entwickelten Theile der krummen Linie, nebst dem übrigen Faden, gleich ist. Z. E. der Stral DG ist gleich dem krummen Theile BD nebst AB, oder DG = BD + BA.

§. 9.

Aufgabe.

Es ist die Gleichung für eine krumme Linie gegeben, und es soll aus derselben die Gleichung für ihre Evolute gefunden werden.



Vorbereitung. Es sey DG die Evolute der BE. Es sey EG einer der Halbmesser der Krümmung für BE oder ein Stral der DG. Es sey EC eine Applikate der BE und CB die dazu gehörige Abzisse. Es sey AE die

Tan-

Tangente für den Punk E. Das Verhältniß zwischen BC und CE oder x und y sey durch eine algebraische Gleichung ausgedrücket. Es soll eine andere Gleichung zwischen BI und IG gefunden werden, da BI als Abzisse und IG Applikate für die Evolute DG betrachtet wird. Es sey demnach BI $=$ z und IG $=$ u.

Zuförderst wissen wir, daß der Stral oder Halbmesser der Krümmung EG auf der Tangente EA senkrecht stehet. Ferner ist AC die Subtangente, CH die Subnormal-Linie, und HE die Normal-Linie.

Die Dreiecke ECH, GIH sind ähnlich, weil sie beide rechtwinklicht sind, und weil sie Scheitelwinkel bei H haben. Also ist

HG, GI :: EH, EC

Nun ist HG $=$ EG $-$ EH. Es ist aber der Halbmesser der Krümmung $EG = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ und EH als Normal-Linie ist $= y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, also ist

$$HG = \frac{dx^2}{-d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} - y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also bekömmt man

$$-\left[\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}+y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \text{ zu } u :: y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ zu } y$$

Dividire den ersten und dritten Satz durch $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

ferner den dritten und vierten durch y so kömmt

$$-\left[\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+y\right] \text{ zu } u :: 1 \text{ zu } 1$$

daher

daher ist

$$u = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right) - y$$

$$\text{daher } y = -u - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

$$\text{oder } y = -u - \frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

Dieses ist demnach das Verhältniß zwischen der Applikate y der gegebenen Linie und der Applikate u der Evolute.

Ferner giebt die Aehnlichkeit der Dreiecke

EC, CH :: GI, IH

$$y,\ y\frac{dy}{dx} ::\ u,\ \text{IH}$$

$$1,\ \frac{dy}{dx} ::\ u,\ \text{IH}\left(= u\frac{dy}{dx}\right)$$

Nun ist

$$x = \text{BC} = \text{BI} - (\text{CH} + \text{HI})$$

$$= z - \left(y\frac{dy}{dx} + u\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= z - (y+u)\frac{dy}{dx}$$

Es ist aber gefunden worden

$$y+u = -\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

$$\text{daher } (y+u)\frac{dy}{dx} = -\frac{dx^2}{d^2y}\cdot\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

$$\text{und } -(y+u)\frac{dy}{dx} = +\frac{dx^2}{d^2y}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

Folg:

Folglich ist

$$x = z + \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

und dieses ist das Verhältniß zwischen den Abzissen x und z

Auflösung.

Man setze also

$$x = z + \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$y = -u - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$$

Vermöge dieser beiden Gleichungen suche die Werthe von x und y in Funkzionen von z und u. Substituire diese Werthe in die gegebene Gleichung, so kömmt eine Gleichung zwischen z und u, welche die Natur der Evolute ausdrücket. Man merke aber wohl, daß bey der zweiten Differenziazion dx als beständig angesehen werden muß, weil es so bei dem Halbmesser der Krümmung angenommen worden, der hier in den Proporzionen gebrauchet worden.

Trift es sich, daß u negativ wird, so ist dieses ein Zeichen, daß die Evolute oberhalb der Direktrize fällt, welches allemal geschehen muß, wenn die gegebene Linie konvex ist.

Exempel. Es sey die gegebene Linie eine Parabel, so ist $y^2 = px$, und es wird, wie schon bei der Untersuchung des Halbmessers der Krümmung gefunden worden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{p^2}{4y^2}$$

$$-\frac{dx^2}{d^2y} = \frac{4y^3}{p^2}$$

$$\frac{dx^2}{d^2y} = -\frac{4y^3}{p^2}$$

Nun ist $x = z + \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}$

$= z - \frac{4y^3}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)\frac{p}{2y}$

Entwickelt man alles, so kömmt

$x = z - \left(\frac{2y^2}{p} + \frac{1}{2}p\right)$

$x = z - \left(\frac{2px}{p} + \frac{1}{2}p\right)$

$x = z - (2x + \frac{1}{2}p) = z - 2x - \frac{1}{2}p$

$3x = z - \frac{1}{2}p$

$x = \frac{z - \frac{1}{2}p}{3}$

Ferner ist $y = -u - \frac{dx^2}{d^2y}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$

$y = -u + \frac{4y^3}{p^2}\left(1 + \frac{p^2}{4y^2}\right)$

$y = -u + \frac{4y^3}{p^2} + y$

$o = -u + \frac{4y^3}{p^2}$

$u = \frac{4y^3}{p^2}$

$p^2 u = 4y^3$

$\frac{p^2 u}{4} = y^3$

$\sqrt[3]{\frac{p^2 u}{4}} = y$

$\frac{p^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}} = y$

Da wir also gefunden $x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}p$ und $y = \frac{p^{\frac{2}{3}} u^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}$

so bleibet uns nur noch übrig diese Werthe in die Gleichung der Parabel zu setzen, da also

$$y^2 = px$$

so wird $\frac{p^{\frac{4}{3}} u^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}}} = \frac{pz - \frac{1}{2}p^2}{3}$

$$3p^{\frac{4}{3}} u^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} (pz - \tfrac{1}{2}p^2)$$

Dividire durch p

$$3p^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} (z - \tfrac{1}{2}p)$$

Erhebe alles zur dritten Potenz, so kömmt

$$27 p u^2 = 16 (z - \tfrac{1}{2} p)^3$$

$$\text{oder } u^2 = \frac{16 (z - \frac{1}{2} p)^3}{27p}$$

und dieses ist die Gleichung der Evolute für die Parabel.

Will man die Gleichung noch einfacher haben, so sey $z - \frac{1}{2}p = v$, dann wird

$$27 p u^2 = 16 v^3$$

$$\text{oder } u^2 = \frac{16 v^3}{27p} = \frac{16}{27} p^{-1} v^3$$

Will man, wie sonst gewöhnlich die Abzissen durch x und die Applikaten durch y ausdrücken, so ist

$$y^2 = \tfrac{16}{27} p^{-1} x^3$$

woraus man siehet, daß diese Linie eine Art von Parabel ist, weil sie unter die allgemeine Gleichung $y^m = a^{m-n} x^n$ gehöret, hier ist $m = 2$, $n = 3$, folglich $m - n = 2 - 3 = -1$, und a ist $= \frac{27}{16} p$, daher $a^{-1} = \frac{16}{27} p^{-1}$.

Zusatz. Will man wissen wo die Evolute DG (obige Figur) ihren Anfang nimmt, oder wo sie der Axe BI begegnet, so betrachte man, daß BD der Halbmesser der Krümmung für den Punkt B ist, und daß im Punkte B, die Abzisse $x = o$, und ebenfalls die Applikate $y = o$. Hat man also den Halbmesser der Krümmung in einer Funkzion von x und y gefunden, so brauchet man nur in solcher Funkzion o für x und y zu setzen. Dann bekömmt man BD, folglich den Punkt D. Zum Exempel in der Parabel ist der Halbmesser der Krümmung

$$\frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} \text{ oder } \frac{(4px + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$$

Wird nun in diesen Formeln $x = o$ oder $y = o$, so bekömmt man

$$\frac{(o + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{(p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{p^3}{2p^2} = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}p$$

Also ist $DB = \frac{1}{2}p$. Dieses $\frac{1}{2}p$ kam eben jezt in der Gleichung der Evolute vor, wo wir $z - \frac{1}{2}p$ oder BI — BD oder DI durch v ausgedrücket haben, da dann die Abzissen nicht mehr vom Punkte B an, sondern von D aus genommen werden.

Anmerkung. Weil die Evoluten der übrigen Kegelschnitte und anderer krummer Linien ziemlich verwickelte Gleichungen haben, so wollen wir uns mit dem Exempel der Parabel begnügen. Bei dem Zirkel findet keine Evolute Statt: denn da alle Halbmesser der Krümmung sich im Mittelpunkte endigen, wie bei § 7. bemerket worden, so fällt auch die Evolute in den einzigen Mittelpunkt zusammen.

Zehntes Hauptstück.

Von einigen merkwürdigen Punkten in den krummen Linien, welche rechtwinkliche Koordinaten haben.

§. 1.

Es giebt fast in jeder krummen Linie einen oder mehrere Punkte die eine besondere Aufmerksamkeit verdienen, weil bei denselben eine Veränderung in dem Laufe oder der Richtung der krummen Linie geschiehet. Solche Punkte wollen wir nun im gegenwärtigen Hauptstücke betrachten.

§. 2.

Einige krumme Linien entfernen sich anfänglich von ihrer Direktrize und nähern sich hernach wieder derselben, wie z. E. die Ellipse und der Zirkel. In diesem Falle muß ein Punkt der krummen Linie am weitesten von der Direktrize entfernet seyn. Die zu solchem Punkte gehörige Applikate wird alsdann die **größte Applikate** genannt.

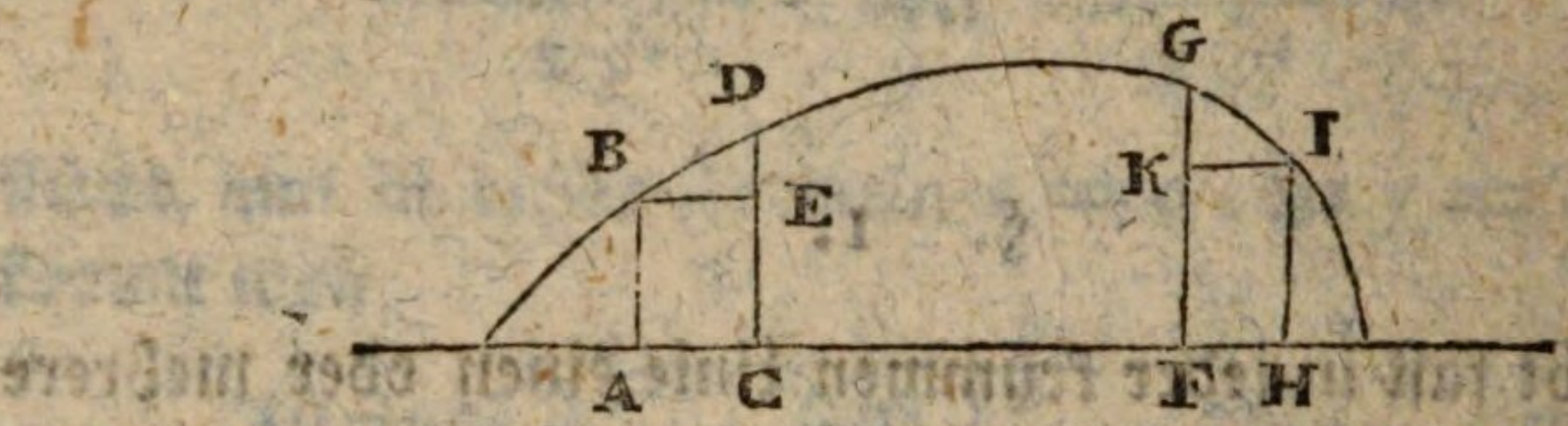
Der Fall könnte auch umgekehrt seyn, es könnte sich nemlich die krumme Linie anfänglich der Direktrize nähern, hernach aber sich wiederum von derselben entfernen. Alsdann müste es einen Punkt geben, welcher der Direktrize am nächsten läge; und die zu demselben gehörige Ap-

plikate würde alsdann die kleinste Applikate seyn. Ueberhaupt nennet man die äussersten Werthe, welche eine veränderliche Größe bekommen kann ein Größtes oder Kleinstes, oder auch auf lateinisch ein Maximum oder Minimum.

§. 3.

Aufgabe.

Die größte oder kleinste Applikate einer krummen Linie finden.



Vorbereitung. So lange die Applikaten einer krummen Linie zunehmen, so ist ihre Differenz positiv; wenn sie aber aber abnehmen, so ist ihre Differenz, negativ. Z. E. Zwischen AB und CD ist die Differenz CD — AB = + ED. Hingegen zwischen FG und HI ist die Differenz HI — FG = — GK. Und dieses ist wahr, so klein man auch die Differenzen annehmen mag. Ist die Linie konvex, so findet das Gegentheil Statt, nemlich die Differenz ist anfänglich negativ, wird aber hernach positiv.

Wenn nun eine Größe vom Positiven ins Negative, oder vom Negativen ins Positive übergehet, so muß ein Augenblick seyn, wo sie Null wird. Und hier wird die Differenz der Applikate null werden, wenn sie aufhöret zuzunehmen, und anfangen will abzunehmen; oder wenn sie aufhöret abzunehmen und anfangen will zuzunehmen.

Wenn man demnach die Gleichung der gegebenen Linie differenziret, und o anstatt dy schreibet, so muß sich ein Werth von x ergeben der dy zu Null, und folglich die Applikate y zur größten oder kleinsten machet. Setzet man nun den gefundenen Werth von x in die Gleichung, so ergiebt sich auch ein Werth von y, welcher entweder der größte oder kleinste ist.

Z. E. In der Ellipse ist

$$y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$$

daher $2y\,dy = p\,dx - 2\frac{p}{a} x\,dx$

Setzet man nun o anstatt dy, so kömmt

$$o = p\,dx - \frac{2p}{a} x\,dx$$

$$o = p - \frac{2p}{a} x$$

$$o = ap - 2px$$

$$o = a - 2x$$

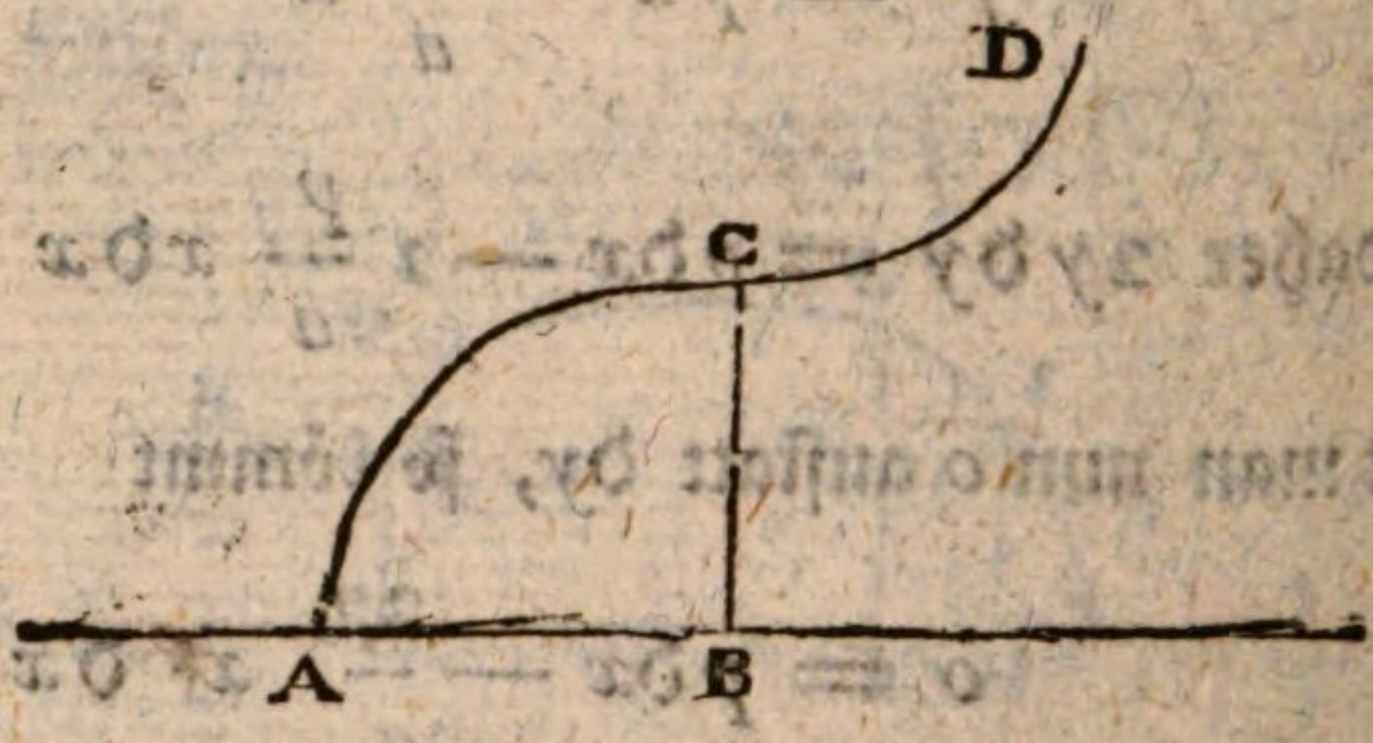
$$2x = a$$

$$x = \tfrac{1}{2} a$$

Also wird $dy = o$, folglich y ein Größtes oder Kleinstes, wenn $x = \frac{1}{2} a$. Setze $\frac{1}{2} a$ anstatt x in die Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$, so kömmt $y^2 = \frac{1}{2} ap - \frac{1}{4} ap$ $= \frac{1}{4} ap$, folglich $y = \pm \sqrt{\frac{1}{4} ap} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{ap}$. Daher dann erhellet, daß in der Ellipse die größte Applikate gleich sey der Hälfte der kleinen Axe, welche durch $\sqrt{ap}$ ausgedrücket wird, und daß diese größte Applikate Statt finde, wenn x der Hälfte der Haupt-Axe gleich geworden ist.

Nun scheinet zwar beym ersten Anblicke die ganze Auflösung hiermit geendiget zu seyn. Hingegen findet es sich bei einer näheren Untersuchung, daß noch ein wichtiger Umstand in Betrachtung gezogen werden muß.

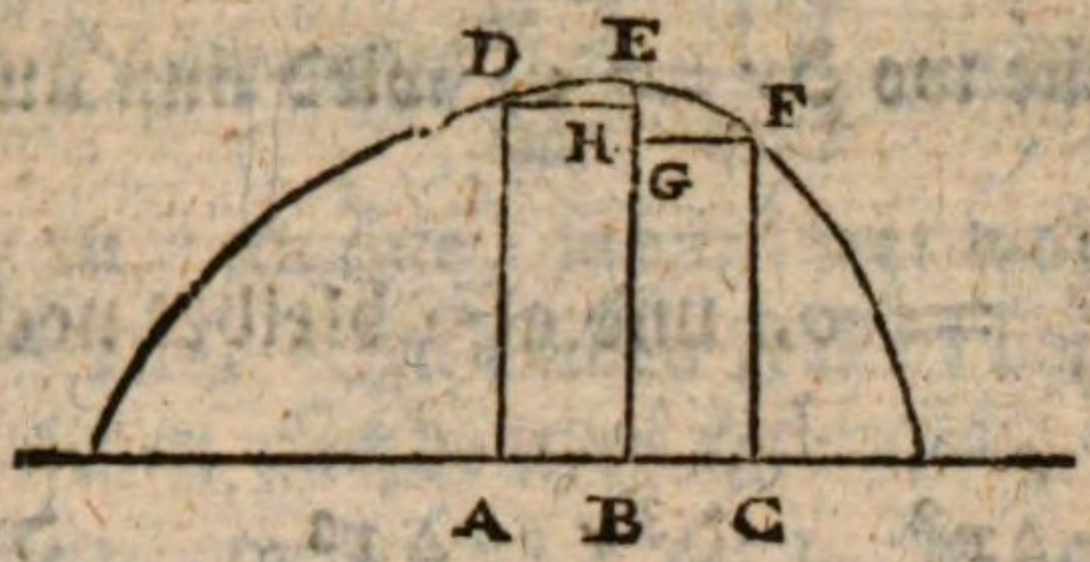
Es könnte nemlich eintreffen, daß bei einem Punkte einer krümmen Linie dy zu Null würde, ohne daß die Applikate eie Größres oder Kleinstes würde. Z. E. gesezt die Linie AD

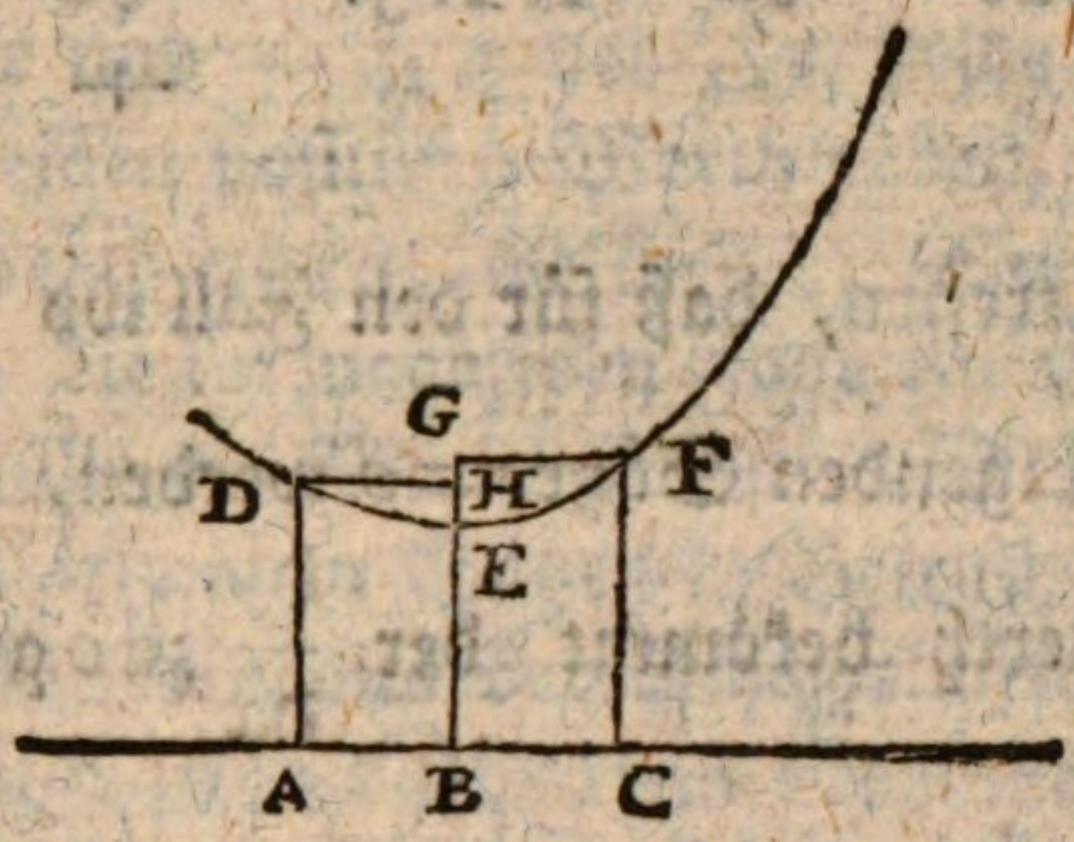


oder eigentlich ihre Tangente sey in C der Direktrisse parallel geworden; sie nehme aber bei C eine andere Biegung; und werde konvex, da sie vorher konkav war, oder umgekehrt, so hat zwar bei C die Differenz der Applikate Null zur Gränze, so daß $dy = 0$, aber es ist deswegen doch BC kein Größtes noch Kleinstes, weil die Applikaten gleich darauf fortfahren zunehmen oder abzunehmen.

Um nun diesen Fall von dem vorigen gehörig zu unterscheiden, so stelle man folgende Betrachtung an

(Siehe die folgenden Figuren.)





Es sey BE die größte Applikate und die Linie konkav, so muß jede vorhergehende AD oder nachfolgende CF kleiner seyn. Man mag also Δx, nemlich BA oder BC entweder rückwärts oder vorwärts nehmen, so muß Δy, nemlich EH oder EG in Betrachtung der EB negativ werden. Es sey die Linie konver, so ist in Betrachtung des BE die Differenz EH oder EG allemal positiv, es mag nun Δx, das ist BA oder BC rückwärts oder vorwärts, nemlich positiv oder negativ, genommen worden.

Nun wird in der Differenzial-Rechnung bewiesen, (VII. H. §. 35.) daß, wenn y eine Funkzion von x ist, die vollständige Differenz von y durch folgende Reihe gefunden werde.

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3.}$$

$$+ \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4.} + \&c.$$

wo dx als eine beständige Größe betrachtet wird.

Im

In dem Falle wo $dy = o$, wird nun auch $\frac{dy}{dx} = o$,

folglich $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} = o$, und also bleibet noch

$$\Delta y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1,2.} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3.} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4.} + \&c.$$

Es kann sich nun treffen, daß für den Fall wo $\frac{dy}{dx} = o$, auch einige der folgenden Sätze $= o$ werden, z. E. daß, wenn x den Werth bekömmt der $\frac{dy}{dx}$ zu o gemacht hat, auch alsdann

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2.}$$

desgleichen $\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3}$

u. s. f.

zu o werden. Aber zulezt muß doch einer dieser Sätze einen geltenden Werth bekommen, und nicht o seyn. Denn sonst wäre die ganze $\Delta y = o$, welches bei keiner krummen Linie Statt finden kann, sondern nur bei einer geraden, die mit der Direktrize parallel ist.

Der erste Satz nun, welcher einen geltenden Werth hat, ist entweder von paarigem oder unpaarigem Grade; (durch den Grad verstehe ich hier sowohl den Exponenten von dx und Δx, als auch die Ordnung des Differenzials).

Es sey der erste geltende Satz von paarigen Grade, z. E. $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2.}$ oder $\frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4.}$, u. s. f. Hier wird

wird nun das Differenzial $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^4y}{dx^4}$, nachdem der Werth von x, der dy zu o machte, substituiret worden, entweder positiv oder negativ. In beiden Fällen behält das Differenzial sein Zeichen nachdem es mit Δx^2, Δx^4, ꝛc. multipliziret worden, weil Δx^2, Δx^4, ꝛc. allemal positive Faktoren sind, es mag Δx positiv oder negativ seyn. Da also $+\Delta x$ und $-\Delta x$ der Δy beide einen negativen, oder beide einen positiven Werth geben, so gehöret der gefundene Werth von x, welcher dy zu o machte, zu einer Applikate, die im negativen Falle ein Maximum und im positiven Falle ein Minimum ist. Daß aber nur der erste von den geltenden Sätzen in Betrachtung gezogen wird, und die folgenden aus der Acht gelassen werden, rühret daher, weil man Δx sehr klein annehmen kann, da dann die höheren Potenzen einen sehr geringen Werth bekommen, der die positive oder negative Eigenschaft der ganzen Reihe nicht verändern kann, welche also darinn dem ersten geltenden Satze ähnlich ist.

Ist der erste geltende Satz von unpaarem Grade, z. E. $\frac{d^3y}{dx^2}.\frac{\Delta x^3}{1.2.3.}, \frac{d^5y}{dx^5}.\frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5.}$, so werden die unpaarigen Potenzen von Δx entweder positiv oder negativ, nachdem die Wurzel Δx selbst positiv oder negativ ist. Folglich bekömmt der Satz zwei Werthe von verschiedener Beschaffenheit, den einen für $+\Delta x$ und den anderen für $-\Delta x$.

Das nemliche gilt von der ganzen Reihe, weil die Höheren Potenzen von Δx sehr klein werden, wenn man Δx selbst klein annimmt. Und da die ganze Reihe den Werth von Δy ausmachet, so wird Δy entweder positiv oder negaziv, nachdem Δx beschaffen ist. Also kann in diesem Falle kein Größtes noch Kleinstes Statt finden, sondern,

nach-

nachdem die Abzissen den Werth erreichet haben, der dy zu o machet, so fahren sie fort, wie vorher zuzunehmen oder abzunehmen.

Aus diesen Betrachtungen fließt nun die Auflösung unserer Aufgabe.

Auflösung.

Man differenzire die gegebene Gleichung, und setze $\frac{dy}{dx} = o$, so findet man einen Werth X des x, und setzet man diesen in die gegebene Gleichung, so bekömmt y einen gewissen Werth Y, welcher das Maximum oder Minimum des y seyn kann, (aber nicht allemal ist.) Sollte aber diese erste Verrichtung für x einen unmöglichen oder unendlichen Werth geben, so braucht man nicht weiter zu gehen; denn man siehet sogleich daraus, daß kein Maximum nnch Minimum Statt findet.

Gesezt nun, ihr findet für x einen möglichen und endlichen Werth, so fahret fort zu differenziren, und suchet die höheren Differenziale, nemlich

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5} \text{ \&c.}$$

wobei zu beobachten ist, daß dx als beständig angesehen wird. Nachdem ihr jeden dieser Sätze ausgerechnet habet, so setzet darinn X anstatt x. Haltet ein bei dem ersten Satze der einen reellen oder wirklichen Werth und nicht Null, giebt. Hat dieser Satz einen unpaarigen Exponenten für dx, als dx^3, dx^5, so seyd ihr gewiß, daß die Applikate weder Maximum noch Minimum hat. Ist aber der Exponent eine Paarzahl, als in dx^2, dx^4, ꝛc. so findet ein Maximum oder Minimum Statt, nachdem

eine

eine negative oder positive Größe herausgekommen ist. (Nemlich die negative Größe zeiget ein Maximum an, die positive hingegen ein Minimum) Das gefundene Y ist alsdann wirklich ein Maximum oder Minimum, und X ist der dazu gehörige Werth das x.

Exempel I. In der Ellipse ist

$$y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$$

daher wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2px}{a}\right)$

Wird nun $\frac{dy}{dx} = o$, so hat man

$$o = \frac{1}{2}\left(px - \frac{p}{x}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(p - \frac{2p}{a}x\right)$$

oder $o = \dfrac{p - \frac{2p}{a}x}{2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}}$

oder, wenn man beiderseits mit $2\sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$ multiplizieret,

$$o = p - \frac{2p}{a}x$$

daraus siehet man daß

$$x = \frac{1}{2}a \text{ oder } X = \frac{1}{2}a$$

Setzet man diesen Werth von X in die Gleichung der Ellipse, nemlich $y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$ so findet man

$$Y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$$

Um nun zu entdecken, ob dieser Werth von Y in der That ein Maximum oder Minimum ist, so muß man suchen $\frac{d^2y}{dx^2}$, indem man dx als beständig behandelt, und man findet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{4}\left(p - \frac{2p}{a}x\right)\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{p}{a}\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Setzet man auch hier $\frac{1}{2}a$ für x, und machet die gehörigen Verkürzungen, so kömmt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2p}{a\sqrt{ap}}$$

Da nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine wirkliche Größe ist, so brauchet man nicht weiter zu differenziren, und weil hier der Exponent in dx^2 eine Paarzahl ist, so findet ein Maximum oder ein Minimum Statt. Endlich da $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine negative Größe geworden ist, so hat man ein Maximum, nicht ein Minimum. Dieses Maximum ist also die größte Applikate in der Ellipse. Da nun gefunden worden,

$$X = \tfrac{1}{2}a$$
$$Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{ap}$$

so muß die Abzisse in der Ellipse $\frac{1}{2}a$ oder die Hälfte der großen Axe seyn, wenn die Applikate ihren größten Werth erreichet. Ferner ist diese größte Applikate selbst $= \frac{1}{2}\sqrt{ap}$, das ist, sie ist die Hälfte der mittlern Proporzional-Linie zwischen dem Parameter und der großen Axe, oder die Hälfte der kleinen Axe, welches alles auch schon in der Vorbereitung angeführet worden.

Exempel II. Es ist in der ganzen Gattung der Zirkel-Linien $y^m = a^n x^{m-n} - x^m$. Wenn man nun $\frac{dy}{dx}$

suchet

suchet, und dieses Differenzial-Verhältniß = o setzet, so kömmt

$$m x^{m-1} = (m-n)\, a^n\, x^{m-n-1}$$

Man dividire beiderseits durch x^{m-1}, so ist

$$m = (m-n)\, a^n\, x^{-n}$$

Man multiplizire mit x^n

$$m x^n = (m-n)\, a^n$$

$$x^n = \frac{(m-n)\, a^n}{m}$$

$$x \text{ oder } X = a\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Setzet man diesen Werth in die Gleichung

$$y^m = a^n\, x^{m-n} - x^m$$

so kömmt

$$y^m = a^n \cdot a^{m-n}\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}} - a^m\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$y^m = a^m\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}} - a^m\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$y^m = a^m\left[\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$Y = a\sqrt[m]{\left[\left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m-n}{n}} - \left(\frac{m-n}{m}\right)^{\frac{m}{n}}\right]}$$

Es sey $m = 2$, und $n = 1$, so hat man die Gleichung des gemeinen Zirkels $y^2 = ax - x^2$. Dann wird

$$X = a\left(\frac{2-1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} = \tfrac{1}{2}a$$

$$Y = a\sqrt[2]{\left[\left(\frac{2-1}{2}\right)^{\frac{2-1}{1}} - \left(\frac{2-1}{2}\right)^{\frac{2}{1}}\right]}$$

$$= a\sqrt[2]{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right)}$$

$$= a\sqrt[2]{\tfrac{1}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{2}a.$$

Es sey $m = 3$, $n = 1$, so ist $y^3 = ax^2 - x^3$, und es wird

$$X = a\left(\frac{3-1}{3}\right)^{\frac{1}{1}} = \tfrac{2}{3}a$$

$$Y = a\sqrt[3]{\left[\left(\frac{3-1}{3}\right)^{\frac{3-1}{1}} - \left(\frac{3-1}{3}\right)^{\frac{3}{1}}\right]}$$

$$= a\sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]}$$

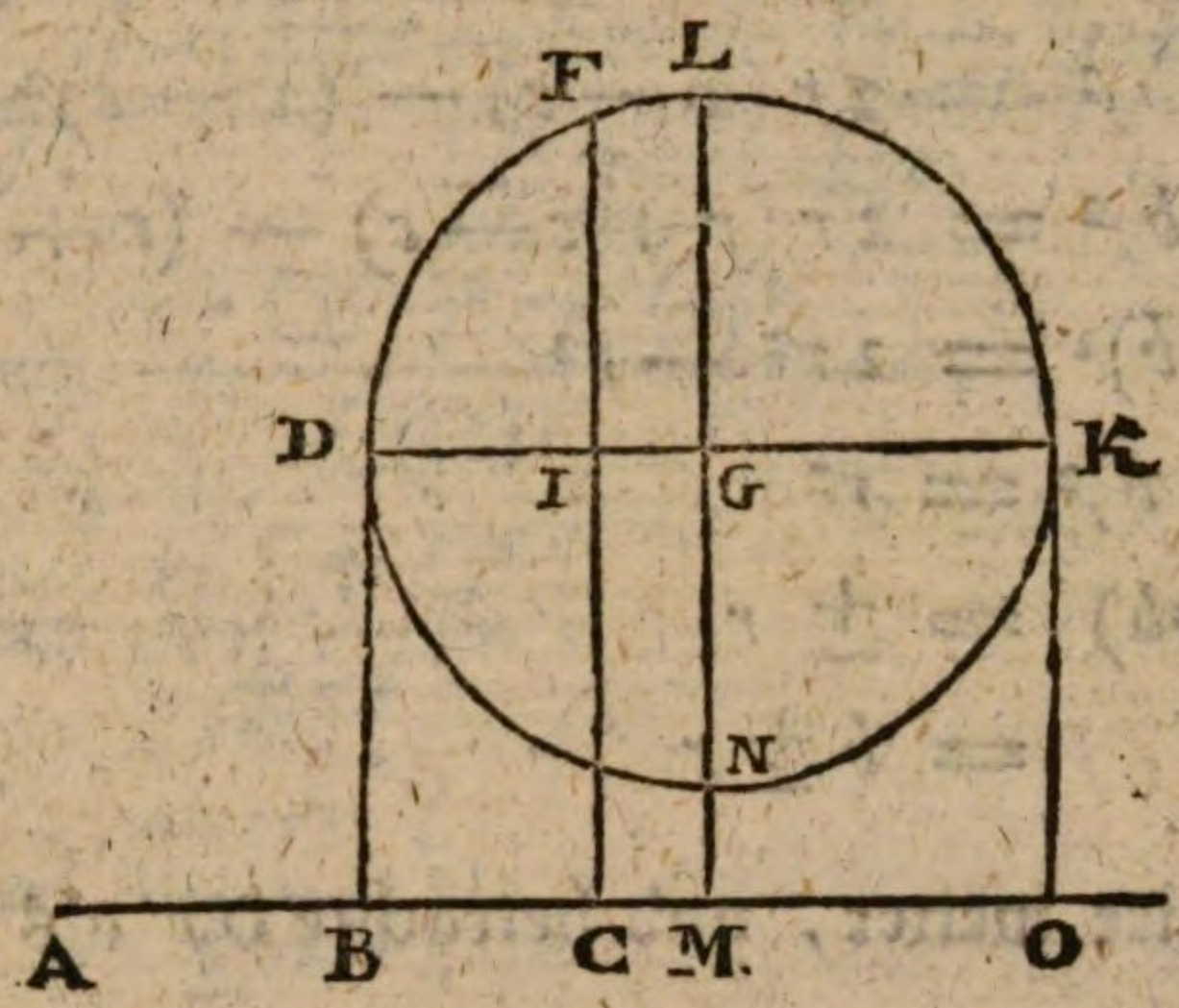
$$= a\sqrt[3]{\left(\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\right)}$$

$$= a\sqrt[3]{\frac{4}{27}} = a\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

Aus $X = \frac{2}{3}a$ siehet man, daß in solchen kubischen Zirkeln wo $y^3 = ax^2 - x^3$, die größte Applikate auf $\frac{2}{3}$ der Axe fällt, worinn sie also von den gemeinen Zirkeln unterschieden sind.

Exem-

Exempel III. Es sey DLKND ein Zirkel. Es werde AO zur Direktrisse, und der Punkt A zum Ursprunge der



Abzissen angenommen. Es sey der Halbmesser $DG = r$, und parallel mit der Direktrisse, es sey DB oder $IC = b$, $AB = c$, $AC = x$, $CF = y$. Es ist im Zirkel

$$IF^2 = DI \times IK$$

$$IF^2 = DI \times (2r - DI)$$

$$IF^2 = 2r.DI - DI^2$$

Nun ist $IF = CF - CI = y - b$, und $DI = BC = AC - AB = x - c$, daher ist

$$(y-b)^2 = 2r(x-c) - (x-c)^2$$

Dieses ist also die Gleichung des Zirkels im angenommenen Falle.

Wenn man differenziret, so kömmt

$$2(y-b)\,\partial y = 2r\,\partial x - 2(x-c)\,\partial x$$

$$(y-b)\,\partial y = r\,\partial x - (x-c)\,\partial x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r-(x-c)}{y-b}$$

und wenn $\frac{dy}{dx} = o$, so wird $X = r + c = AM$

Setzet man $r + c$ anstatt x in die Gleichung

$$(y-b)^2 = 2r(x-c) - (x-c)^2$$

so kömt $(y-b)^2 = 2r(r+c-c) - (r+c-c)^2$

$$(y-b)^2 = 2r^2 - r^2$$

$$(y-b)^2 = r^2$$

$$(y-b) = \pm r$$

$$Y = b \pm r$$

Man differenzire weiter, und betrachte dx als beständig. Es war

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r-(x-c)}{y-b}$$

folglich $\frac{d^2y}{dx} = \frac{-(y-b)\,dx - [r-(x-c)]\,dy}{(y-b)^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-b) - [r-(x-c)]\frac{dy}{dx}}{(y-b)^2}$$

Substituire hierinn den Werth von $\frac{dy}{dx}$, so kömt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-b) - [r-(x-c)].\frac{r-(x-c)}{y-b}}{(y-b)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-(y-b)^2 - [r-(x-c)]^2}{(y-b)^3}$$

Nun müste man anstatt y dessen Werth setzen, nemlich $\sqrt{[2r(x-c) - (x-c)^2]}$, hernach aber anstatt x das

X substituiren. Es ist aber einerlei, wenn man sogleich nicht nur X für x, sondern auch Y für y substituiret. Wird dieses gethan, so ist $x = r + c$, $y = b \pm r$. Daher

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-(b \pm r - b)^2 - [r - (r + c - c)]^2}{(b \pm r - b)^3}$$

$$= \frac{-(\pm r)^2 - (0)^2}{(\pm r)^3}$$

$$= \frac{-(+r)^2}{\pm r^3}$$

$$= \frac{-r^2}{\pm r^3}$$

$$= \frac{-1}{\pm r}$$

$$= \pm \frac{1}{r}$$

Da also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sowohl einen positiven, als auch einen negativen Werth bekömmt, so gieb $x = r + c$ in der Gleichung sowohl ein Minimum als auch ein Maximum. Es ist demnach $b \pm r$ ein Maximum und ein Minimum, daß heißt $b + r =$ ML ist die größte Applikate, und $b - r =$ MN ist die kleinste.

Exempel IV. In der gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = a^2$, oder

$$y = a^2 x^{-1}$$

daher $\partial y = -a^2 x^{-2} \partial x$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -a^2 x^{-2}$$

Ist nun $\frac{dy}{dx} = o$, so wird

$$o = -a^2 x^{-2}$$

$$o = -\frac{a^2}{x^2}$$

$$o = -a^2$$

welches ungereimt ist; daher zu sehen ist, daß hier weder Maximum noch Mininum Statt findet, sondern daß die Applikaten ohne Ende abnehmen.

Zusatz. Die Erforschung der größten und kleinsten Applikaten ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Methode zur Erforschung der größten und kleinsten Werthe der Funkzionen. (Siehe den selbstlernenden Algebristen. XVII. Hauptstück § 9.) Diese Methode kann auf vielerlei andere geometrische Fragen angewandt werden.

Z. E. Es sey a^3 der körperliche Inhalt unendlich vieler Zylinder. Es soll nun unter allen diesen Zylindern derjenige bestimmet werden, der die kleinste oder größte Oberfläche hat, wenn solches angehet. Es sey x der Durchmesser der Basis, die ganze Oberfläche y. Es sey für jezt die Höhe des verlangten Zylinders $= z$. In jedem Zirkel verhalte sich der Durchmesser zum Umkreise wie 1 zu π. So ist der Umkreis der Basis πx, der Flächen-Inhalt derselben $\pi x \cdot \frac{x}{4} = \frac{\pi x^2}{4}$, der körperliche Inhalt des Zylinders $= \frac{\pi x^2}{4} \cdot z$ Nun soll dieser körperlicher Inhalt gleich seyn a^3, also ist

$$\frac{\pi x^2}{4} \cdot z = a^3$$

Höhe $$z = \frac{4a^3}{\pi x^2}$$

Der

Die krumme Oberfläche des Zylinders ist gleich dem Produkte aus der Höhe z und dem Umkreise der Grundfläche, also ist sie

$$\pi x \cdot \frac{4a^3}{\pi x^2} = \frac{4a^3}{x}$$

Setze noch die doppelte Grundfläche hiezu, so kömmt

$$y = \frac{2\pi x^2}{4} + \frac{4a^3}{x}$$

$$y = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{4a^3}{x}$$

Dieses ist die Gleichung zwischen dem Diameter x und der Oberfläche y. Man stelle sich vor, wenn man will, diese Gleichung drücke die Beschaffenheit einer krummen Linie aus, und es seyen x und y die Koordinaten derselben.

Man suche demnach den größten Werth von y. Es ist

$$dy = \pi x dx - 4a^3 x^{-2} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \pi x - \frac{4a^3}{x^2}$$

und wenn $\frac{dy}{dx} = o$, so ist

$$\pi x - \frac{4a^3}{x^2} = o$$

$$\pi x^3 - 4a^3 = o$$

$$\pi x^3 = 4a^3$$

$$x^3 = \frac{4a^3}{\pi}$$

$$x \text{ oder } X = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Um nun zu versuchen, ob $x = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ wirklich ein Maximum oder Minimum ist, so differenzire man weiter, und lasse dx unverändert.

$$\text{Weil } \frac{dy}{dx} = \pi x - 4a^3 x^{-2}$$

$$\text{so ist } \frac{d^2y}{dx} = \pi dx + 8a^3 x^{-3} dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pi + \frac{8a^3}{x^3}$$

$$\text{Setze } x^3 = \frac{4a^3}{\pi}$$

$$\text{so ist } \frac{d^2y}{dx^2} = \pi + 8a^3 : \frac{4a^3}{\pi}$$

$$= \pi + 2\pi$$

$$= 3\pi$$

und da dieses eine positive Grösse ist, so muß daraus geschlossen werden, daß, wenn $a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ zum Diameter der Basis genommen wird, alsdann die Oberfläche y ein Minimum werde.

Es war die Höhe $z = \frac{4a^3}{\pi x^2}$

$$= \frac{4a^3}{\pi} : x^2$$

$$= \frac{4a^3}{\pi} : \frac{4^{\frac{2}{3}} a^2}{\pi^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4a^3 \pi^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}} \pi a^2}$$

$$= \frac{4^{\frac{1}{3}} a}{\pi^{\frac{1}{3}}}$$

$$= a \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Es war aber auch $x = a \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

Woraus man also siehet, daß die Oberfläche am kleinsten wird, wenn die Höhe dem Diameter der Grundfläche gleich ist. Um aber diesen Diameter zu finden, sage man

$$\pi, \ 4 :: a^3, \ x^3$$

das heißt, die Peripherie verhält sich zum vierfachen Diameter, wie der körperliche Inhalt zum Würfel der Höhe des Zylinders. Aus diesem Würfel wird alsdann die Kubikwurzel gezogen.

§. 4.

Eben so wie es größte und kleinste Applikaten giebt, so findet man auch in vielen Linien größte und kleinste Abzissen, woran man zugleich den Anfang und das Ende einer krummen Linie erkennen kann.

§. 5.

§. 5.

Aufgabe.

Die größte oder kleinste Abzisse einer krummen Linie finden.

Auflösung. Die Abzisse ist eine Funkzion der Applikate, so wohl als diese von jener eine Funkzion ist. Ist demnach in der Gleichung der krummen Linie die Abzisse durch x und die Applikate durch y ausgedrücket, so wird der größte oder kleinste Werth für x eben so wie bei voriger Aufgabe für y gefunden. Um der Einbildungskraft zur Hülfe zu kommen, stelle man sich vor, die Koordinaten werden verwechselt, es werde y zur Abzisse, und x zur Ordinate.

Man nehme also nach und nach folgende Differenziale vor

$$\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^3x}{dy^3}, \frac{d^4x}{dy^4}, \text{ &c.}$$

worinn dy beständig ist. Man setzet $\frac{dx}{dy} = o$, und wenn daraus ein wirklicher und möglicher Werth von y entstehet, so setze man ihn in die Gleichung der krummen Linie, daher man dann einen gewissen Werth von x bekommen wird.

Um zu erfahren, ob dieser wirklich ein Maximum oder Minimum ist, so nehme man die folgenden Differenziale, und setze darinn den gefundenen Werth von y. Man bleibe bei dem ersten Satze stehen, der eine wirkliche Größe, nicht Null, giebt. Hat dieser einen paarigen Exponenten, so findet ein Maximum oder Minimum Statt, nachdem man eine negative oder positive Größe erhalten hat.

Exem-

Exempel. I. In der Ellipse ist

$$y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$$

$$2y\partial y = \left(p - \frac{2p}{a} x\right) \partial x$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p - \frac{2p}{a} x}$$

Man setze dieses $= o$, so ist

$$o = 2y$$

$$o = y$$

Setze o anstatt y in der Gleichung $y^2 = px - \frac{p}{a} x^2$, so kömmt

$$o = px - \frac{p}{a} x^2$$

$$o = apx - px^2$$

$$o = ax - x^2$$

$$x^2 = ax$$

daher $x = a$

oder auch $x = o$

Also ist vermuthlich $x = a$ das Maximum und $x = o$ das Minimum von x. Um sich dessen zu versichern, differenzire man weiter, und lasse ∂y unverändert.

Weil $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p - \frac{2p}{a}x}$

so ist $\frac{d^2x}{dy} = \frac{2\left(p - \frac{2p}{a}x\right)dy + \frac{4py}{a}dx}{\left(p - \frac{2p}{a}x\right)^2}$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\left(p - \frac{2p}{a}x\right) + \frac{4py}{a} \cdot \frac{dx}{dy}}{\left(p - \frac{2p}{a}x\right)^2}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\left(p - \frac{2p}{a}x\right) + \frac{8py^2}{a\left(p - \frac{2p}{a}x\right)}}{\left(p - \frac{2p}{a}x\right)^2}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2a\left(p - \frac{2p}{a}x\right)^2 + 8py^2}{\left(p - \frac{2p}{a}x\right)^3}$$

Setze o für y und auch für x, so kömt

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2a(p)^2}{p^3} = +\frac{2a}{p}$$

welches also ein Minimum anzeiget.

Ist aber $y = o$ und $x = a$, so wird

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2a(p-2p)^2}{(p-2p)^3}$$

$$= \frac{2a(-p)^2}{(-p)^3}$$

$$= \frac{2ap^2}{-p}$$

$$= -\frac{2a}{p}$$

welches ein Maximum anzeiget.

Also ist o wirklich das Minimum und a ist das Maximum von x.

Es erhellet schon aus der Konstrukzion der Ellipse, daß x keinen kleineren Werth als o, noch einen größeren als a haben kann Das nemliche kann man auch der Gleichung für die Ellipse ansehen. Denn da

$$y = \sqrt{\left(px - \frac{p}{a}x^2\right)}$$

oder $$y = \sqrt{\left(\frac{apx - px^2}{a}\right)}$$

oder $$y = \sqrt{\frac{px(a-x)}{a}}$$

so kann x nicht größer als a werden, denn sonst würde $a-x$, folglich auch $\frac{px(a-x)}{a}$ negativ, folglich $\sqrt{\frac{px(a-x)}{a}}$ imaginär, folglich y eine unmögliche Größe. Würde aber x kleiner als o, so wäre x negativ, folglich $-x$ positiv,

sitiv, und die Gleichung $y = \sqrt{\frac{-px(a+x)}{a}}$ würde ebenfalls für y einen imaginären Werth geben.

Exempel II. Die Gleichung

$$(y-b)^2 = 2r(x-c) - (x-c)^2$$

drücket ein Zirkel aus, wo die Direktrize ausserhalb der Zirkelfläche genommen wird (§ 3 Ex. III.) Diese Gleichung giebt

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-b}{r-(x-c)}$$

Ist nun $\frac{dx}{dy} = o$, so wird $y = b$. Setzet man diesen Werth in die Gleichung, so kömmt

$$o = 2r(x-c) - (x-c)^2$$

$$(x-c)^2 = 2r(x-c)$$

daher $x-c = 2r$ oder $x = c+2r$

und $x-c = o$ oder $x = c$

Man differenzire weiter, und halte dy für beständig

Da $\frac{dx}{dy} = \frac{y-b}{r-(x-c)}$

so ist $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{[r-(x-c)]\,dy + (y-b)\,dx}{[r-(x-c)]^2}$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{[r-(x-c)] + (y-b)\frac{dx}{dy}}{[r-(x-c)]^2}$$

Setze man anstatt $\frac{dx}{dy}$ seinen Werth, so kömt

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{[r-(x-c)]^2 + (y-b)^2}{[r-(x-c)]^3}$$

Setze

Setze $y = b$ und $x = c$, so kömt

$$\frac{d^2x}{dy^2} = +\frac{r^2}{r^3} = +\frac{1}{r}.$$

Da diese Grösse positiv ist, so ist $x = c$ ein Minimum.

Setzet man $y = b$, und $x = c + 2r$, so kömmt

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(-r)^2}{(-r)^3} = \frac{+r^2}{-r^3} = -\frac{1}{r}$$

Diese negative Größe zeiget an, daß $x = c + 2r$ ein Maximum ist.

Dieses stimmet völlig mit der Figur (§ 3. Ex. III) überein; denn dort ist $AB = c$ der kleinste und $AO = c + 2r$ der größte Werth der Abzisse, und zu beiden gehört die Applikate $DB = KO = b$.

Exempel III. In der Hyperbel, wenn die Abzissen vom Mittelpunkte aus genommen werden, ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

daher $2y\,dy = \frac{2b^2}{a^2}x\,dx$

$$y\,dy = \frac{b^2}{a^2}x\,dx$$

$$a^2 y\,dy = b^2 x\,dx$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

und wenn $\frac{dx}{dy} = o$, so ist

$$\frac{a^2 y}{b^2 x} = o$$

daher $y = o$

Setzet man diesen Werth in obige Gleichung der Hyperbel, so wird

$$o = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

und $x = \pm a$

Man differenzire zum zweiten male und nehme dy für beständig an.

$$\text{Weil } \frac{dx}{dy} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

$$\text{so ist } \frac{d^2 x}{dy} = \frac{a^2 b^2 x\, dy - a^2 b^2 y\, dx}{b^4 x^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{a^2 b^2 x - a^2 b^2 y \frac{dx}{dy}}{b^4 x^2}$$

Man substituire den Werth von $\frac{dx}{dy}$, so kömt

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{a^2 b^4 x^2 - a^4 b^2 y^2}{b^6 x^3}$$

Substituire für y dessen Werth o und für x dessen Werth $\pm a$, so kömt

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{a^4 b^4}{a^3 b^6} = + \frac{a}{b^2}$$

und da dieses eine positive Größe ist, so folget daraus, daß $x = \pm a$ ein Minimum seyn muß.

§. 6.

Einige Linien schneiden nicht ihre Direktrize, wie z. E. die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, auch der Zirkel, wenn die Direktrize ausserhalb seiner Fläche lieget. (§ 3.)

Exem-

Exempel III). Andere hingegen schneiden die Direktrize, oder begegnen derselben entweder einmal, als die Parabel, oder zweimal, wie die Ellipse, oder mehrmal, wie einige Linien von höheren Ordnungen.

§. 7.

Aufgabe.

Es sollen die Punkte bestimmet werden, wo eine krumme Linie ihrer Direktrize begegnet.

Auflösung. Wenn y zu nichts oder Null wird, so begegnet die krumme Linie ihrer Direktrize.

Man kann also aus der Untersuchung des Maximum oder Minimum der Abzisse x, zugleich auf die verlangten Punkte schließen (§. 5).

Denn, zeiget es sich bei dieser Untersuchung, daß x ein Maximum oder Minimum wird, wenn y einen wirklichen Werth hat, wie bei dem Exempel des Zirkels (§ 5) gesehen worden, so trift die krumme Linie nicht ihre Direktrize.

Zeiget es sich aber, daß das Maximum oder Minimum von x erfordert, daß $y = o$ sey, wie bey der Ellipse und der Hyperbel (§ 5) so sind die gefundenen Maxima oder Minima die Abzissen, welche y zu o machen, und an deren Enden die krumme Linie ihre Direktrize schneidet. So viel man also in diesem Falle Maxima oder Minima von x heraus bringet, so viel giebt es Stellen, wo die krumme Linie ihre Direktrize schneidet.

Giebt also $y = o$ dem x nur einen Werth, so ist nur ein Schnitt; kommen zwei Werthe wie bei der Ellipse, so giebt es zwei Schnitte. Kämen mehrere Werthe, wie es bei höheren Ordnungen der krummen Linien geschehen kann, so gäbe es eben

viel Schnitte. Denn da jeder Theil, von einem Schnitte zum anderen, wiederum als eine für sich bestehende krumme Linie betrachtet werden kann, so sind die Punkte wo die Schnitte geschehen, alle als Maxima oder Minima zu betrachten.

Anders. Man braucht auch nur bloß ohne weitere Umstände in die Gleichung o anstatt y zu setzen. So viel Werthe alsdann x bekömmt, so viel mal schneidet die krumme Linie ihre Direktrisse. Bekömt x keinen Werth, oder einen unendlichen Werth, so schneidet die krumme Linie nicht ihre Direktrisse.

Exempel I. In der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist

$$xy = a^2$$

wenn nun $y = o$, so wird

$$o = a^2$$

welches unmöglich ist. Folglich ist es auch unmöglich, daß diese Linie ihre Direktrisse schneide.

Exempel II. In der Parabel ist

$$y^2 = px$$

wird nun $y = o$, so ist

$$x = o$$

das heißt, die Parabel begegnet ihrer Direktrisse nur einmal, und dieses in dem Punkte wo $x = o$ ist, nemlich am Scheitel.

Exempel III. In der Ellipse ist $y^2 = px - \frac{p}{a}x^2$;

soll nun $y = o$ werden, so muß seyn

$$o = px - \frac{p}{a} x^2$$

$$o = apx - px^2$$

$$o = ax - x^2$$

$$a^2 = ax$$

welches giebt, entweder

$$x = a$$

oder $x = o$

Also begegnet die Ellipse ihrer Direktrisse an zwei Orten, nemlich wenn $x = o$, und wenn $x = a$.

Exempel IV. Es sey gegeben eine Linie von der dritten Ordnung, worinnen $a^2 y = x^3 - b^2 x$. Setzet man $y = o$, so wird

$$x^3 - b^2 x = o$$

$$x (x^2 - b^2) = o$$

Dividiret man durch $(x^2 - b^2)$ so kömt $x = o$.

Dividiret man durch x, so kömt

$$x^2 - b^2 = o$$

$$x^2 = b^2$$

$$x = \pm b$$

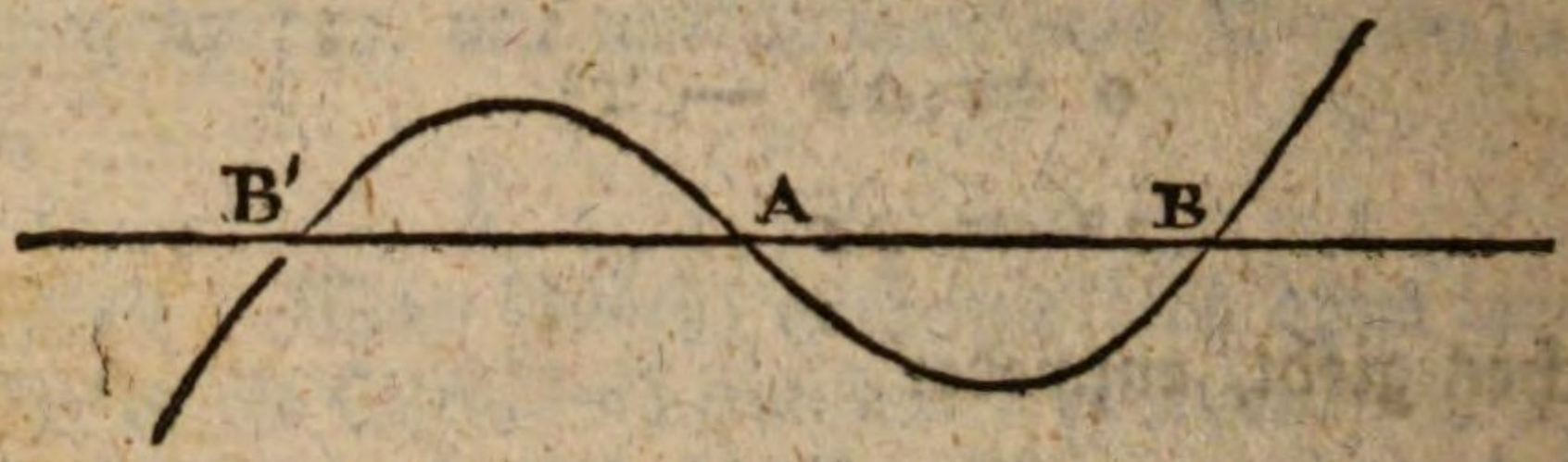
Also hat x drei Werthe, welche y zu Null machen, nemlich

$$x = o$$

$$x = + b$$

$$x = - b$$

Folglich schneidet die krumme Linie die Direktrisse an den Enden dieser drei Abzissen. Die Linie bekömt ohngefähr folgende Gestalt



Es ist A der Ursprung der Abzissen, AB $= +b$, AB' $= -b$.

§. 8.

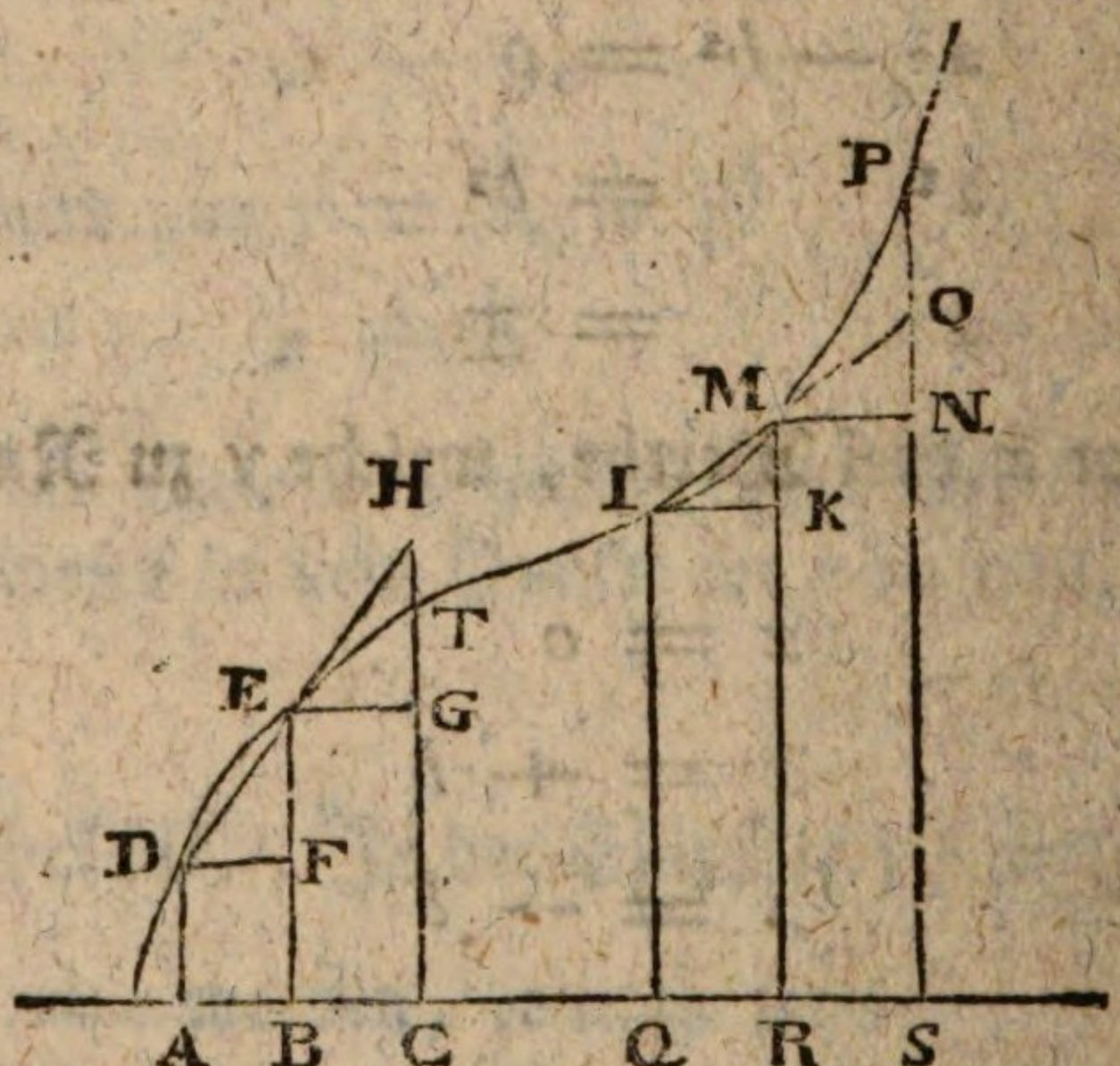
Wenn eine krumme Linie theils konkav und theils konvex ist, so giebt es einen Punkt, der den konkaven Theil vom konvexen absondert, und dieser Punkt wird der Biegungspunkt (point d'inflexion) genannt.

§. 9.

Aufgabe.

Den Biegungspunkt einer krummen Linie finden, wenn sie einen hat.

Vorbereitung.



In einer konkavo-konvexen Linie sind die zweiten Differenzen der Applikaten im konkaven Theile negativ, im konvexen aber positiv. Es seyen drei Applikaten AD, BE, CT im konkaven Theile. Wir nehmen zu mehrerer Bequemlichkeit an, es sey Δx beständig oder unverändert, also $AB = BC = DF = EG$. Verlängere CT nach H zu. Durch D und E ziehe DH welche die verlängerte CT schneidet, so ist $\triangle EGH \sim \triangle DFE$, weil sie von parallelen Linien gebildet sind, und weil $EG = DF$. Also ist $GH = FE$. Nun sind FE und GT zwei Differenzen der Applikate. Die Differenz dieser Differenzen ist $GT - EF = GT - GH = -TH$. Diese zweite Differenz TH ist demnach negativ.

Es seyen QI, RM, SP drei Applikaten im konvexen Theile der krummen Linie, und wiederum $QR = RS = IK = MN$. Verlängere IM nach O zu, so wird $\triangle MNO \sim \triangle IKM$ und $NO = KM$. Nun sind KM und NP zwei Differenzen der Applikaten. Die Differenz der Differenzen oder die zweite Differenz ist demnach $NP - KM = NP - NO = +PO$, eine positive Größe.

Dieses gilt nun, die Differenzen mögen so klein angenommen werden als man will. Da also das Differenzial d^2y vom Negativen ins Positive übergehet, so muß es null werden, wo das Positive aufhört und das Negative anfängt, das ist, im Biegungspunkte.

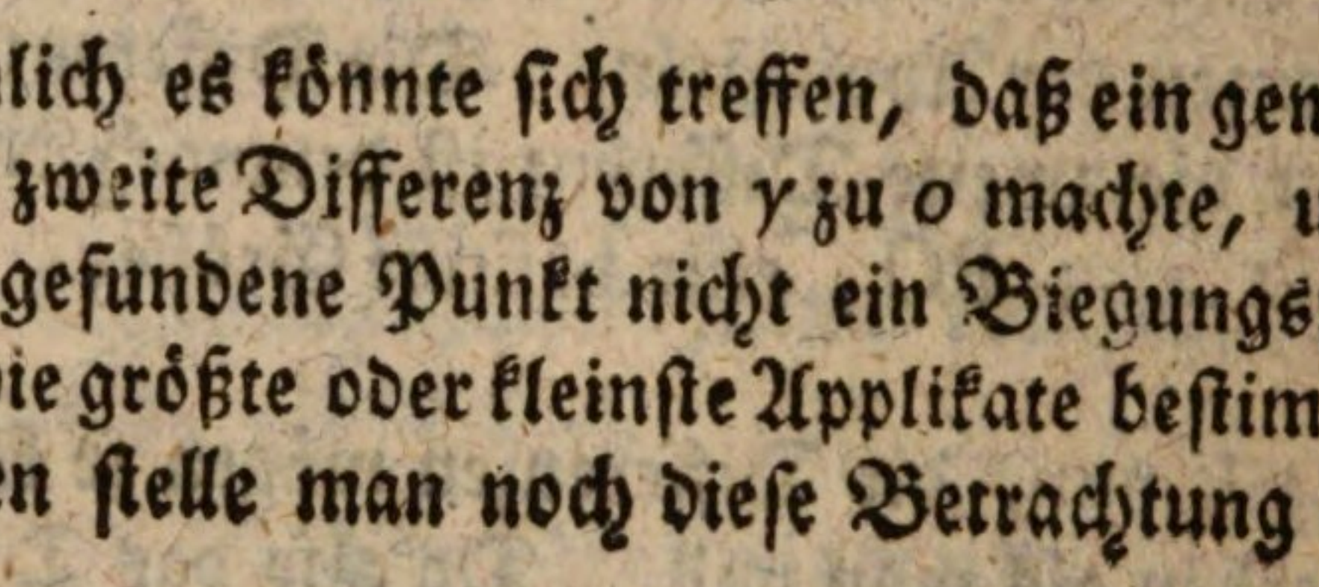
Wir haben in der Figur angenommen, daß die Abzissen von der linken Hand zur rechten zunehmen, und die Linie mit dem konkaven Theile anfange. Gesetzet nun, die Applikaten werden von der rechten Hand zur linken genommen, und die Linie fange mit dem konvexen Theile an, so findet das nemliche Statt. Beide aufeinander folgende Differenzen im konvexen Theile sind NP und KM. Also ist die zweite Differenz $MK - PN = -(PN - MK) = -(PN - NO) = -PO$. Im konkaven Theile

folgen auf einander die Differenzen GT und EF. Es ist also die zweite Differenz = EF — GT = HG — GT = + HT.

Die Bemerkung ist folglich allgemein, daß in einer konkavo-konvexen Linie das zweite Differenzial der Applikaten aus dem Negativen ins Positive übergehet, und im Biegungspunkte Null ist.

Man differenzire also die gegebene Gleichung zweimal und mache $d^2 y = o$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2} = o$, so kömmt ein gewisser Werth von x, wozu aus der Gleichung ein gewisser Werth von y gefunden werden kann. Diese beiden Koordinaten nun bestimmen den Biegungspunkt, jedoch unter einer Bedingung.

Nemlich es könnte sich treffen, daß ein gewisser Werth von x die zweite Differenz von y zu o machte, und daß dennoch der gefundene Punkt nicht ein Biegungspunkt wäre, sondern die größte oder kleinste Applikate bestimmte. (§. 3.) Deswegen stelle man noch diese Betrachtung an.



Es sey eine krumme Linie A C B und in derselben der Punkt C. Durch diesen Punkt ziehe man die Tangente D E. Wenn von dem Bogen, der durch die Tangente

abgetheilet wird, der eine Theil diesseits und der andere jenseits der Tangente lieget, so ist der Punkt C gewiß der Biegungspunkt. Es sey nun $AK = x$, $KC = y$, $KL = CI = \Delta x$, $IB = \Delta y$. Nun ist $KD = y\frac{dx}{dy}$, und es ist

$$KD, KC :: CI, IE$$

$$y\frac{dx}{dy}, y :: \Delta x, IE \left(= \frac{\Delta x}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1}\right)$$

Es sey $BE = u$, so ist

$$BE = BI - IE$$

$$u = \Delta y - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1}$$

Nun ist

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot + \&c.$$

Also

$$\Delta y - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{1} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

$$\text{oder } u = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \&c.$$

Gesetzet nun $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} = o$, oder $\frac{d^2y}{dx^2} = o$, habe für x einen gewissen Werth gegeben, und die Applikate KC bestimmet, so muß, wenn diese Applikate den Biegungspunkt C bestimmen soll, der Werth von u posi-

tiv oder negativ werden, nachdem $\triangle x$ positiv oder negativ angenommen wird. Man stelle also bei der letzten Reihe die nemlichen Betrachtungen an, die bei den größten und kleinsten Applikaten gemacht worden, so wird sich finden, daß, wenn das erste geltende Differenzial für den gefundenen Werth des x von unpaarer Ordnung ist, alsdann die Reihe, oder das u, für $+\triangle x$ positiv und für $-\triangle x$ negativ, oder für $+\triangle x$ negativ und für $-\triangle x$ positiv wird. In diesem Falle also gehören die gefundenen Werthe von x und y zu einem Biegungspunkte.

Auflösung. Suche das zweite Differenzial der gegebenen Gleichung, indem du dx als beständig behandelst; mache d^2y oder $\frac{d^2y}{dx^2} = o$. Kömmt nun kein Werth für x, so findet kein Biegungspunkt Statt. Kömmt aber ein Werth für x, so giebt dieser den dazu gehörigen Werth von y, und beide bestimmen einen gewissen Punkt der krummen Linie.

Differenzire weiter, und suche

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \text{ \&c.}$$

Substituire in jedem dieser Differenziale die gefundenen Werthe von x und y. Wenn nun das erste Differenzial, welches nicht null wird, sondern einen geltenden Werth bekömmt, von unpaariger Ordnung ist, so findet ein Biegungspunkt Statt. Ist es aber von paariger Ordnung, so giebt es keinen Biegungspunkt.

Exempel. Es sey eine krumme Linie gegeben, worin das Verhältniß der Koordinaten durch folgende Gleichung ausgedrücket wird $x^2 y + a^2 y = a x^2$

oder

$$\text{oder } y = \frac{a x^2}{(x^2 + a^2)}$$

$$\text{so ist } \partial y = \frac{2a(x^2 + a^2)\, x\, \partial x - 2a x^3\, \partial x}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a(x^2 + a^2)\, x - 2a x^3}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x} = \frac{2a^3(x^2+a^2)^2\, \partial x - 8a^3 x^2 (x^2+a^2)\partial x}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^3(x^2+a^2)^2 - 8a^3 x^2 (x^2+a^2)}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^3(x^2 + a^2) - 8a^3 x^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^5 - 6a^3 x^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

Seßet man dieſes Differenzial $= o$, ſo kömmt

$$2a^5 - 6a^3 x^2 = o$$

$$a^5 - 3a^3 x^2 = o$$

$$a^2 - 3x^2 = o$$

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{3} a^2$$

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{3} a^2}$$

Wir wollen, der Kürze halben, nur den poſitiven Werth von x, nemlich $+\sqrt{\frac{1}{3} a^2}$ betrachten.

Man

Man setze diesen Werth in die Gleichung

$$y = \frac{a\,x^2}{x^2 + a^2}$$

so ist $y = \frac{a.\ \frac{1}{3}a^2}{\frac{1}{3}a^2 + a^2} = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}a$

Um nun zu erfahren, ob die gefundenen Werthe von x und y wirklich zu einem Biegungspunkte gehören, so differenzire man weiter, und mache dx beständig.

Es war $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^5 - 6a^3x^2}{(x^2 + a^2)^3}$, daher ist

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{-12a^3(x^2+a^2)^3 x dx - (12a^5x - 36a^3x^3)(x^2-a^2)^2 dx}{(x^2 + a^2)^6}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-12a^3(x^2+a^2)^3 x - (12a^5x - 36a^3x^3)(x^2+a^2)^2}{(x^2 + a^2)^6}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-12a^3(x^2 + a^2)x - 12a^5x + 36a^3x^3}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^3x^3 - 24a^5x}{(x^2 + a^2)^4}$$

Man setze $\sqrt{\frac{1}{3}a^2}$ anstatt x, so kömmt

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{24a^3.\frac{1}{3}a^2\sqrt{\frac{1}{3}a^2} - 24a^5\sqrt{\frac{1}{3}a^2}}{(\frac{4}{3}a^2)^4}$$

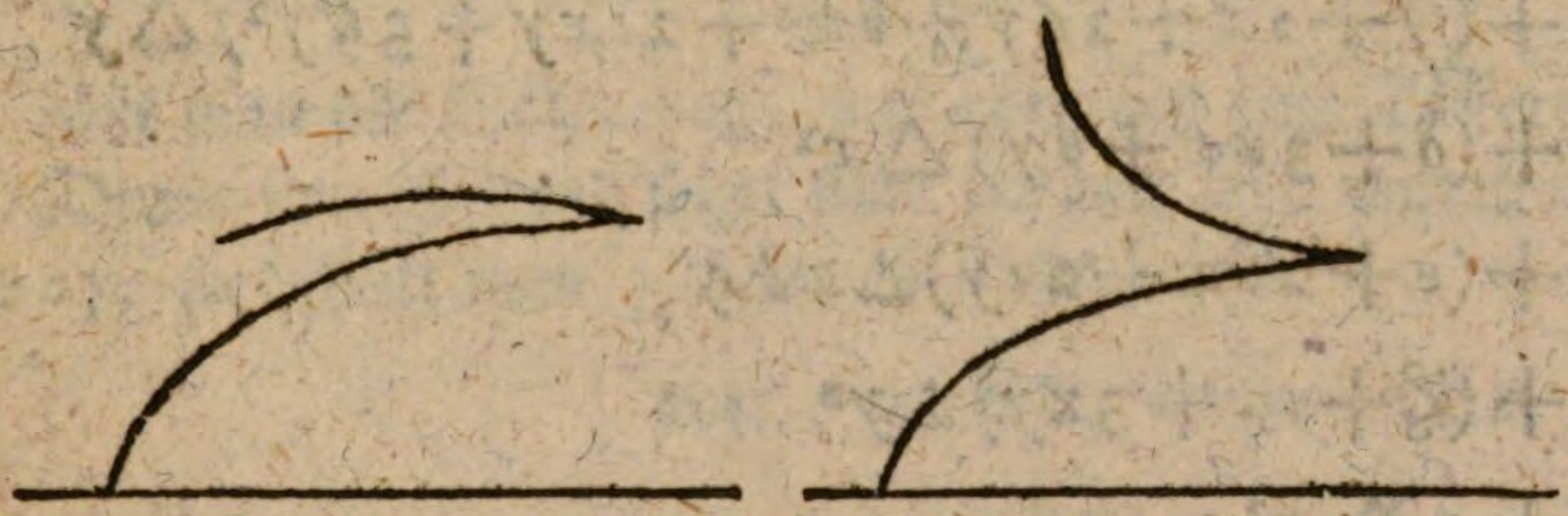
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{8a^6\sqrt{\frac{1}{3}} - 24a^6\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{256}{81}a^8}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-16a^6\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{256}{81}a^8} = \frac{-16\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{256}{81}a^2} = \frac{-81\sqrt{\frac{1}{3}}}{16a^2}$$

Da nun dieses unpaarige Differenzial eine geltende Größe, nicht null, geworden ist, so gehören die gefundenen Koordinaten $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$ und $y = \frac{1}{4}a$ wirklich zu einem Biegungspunkte.

§. 10.

Es giebt einige Linien, die sich nicht vorwärts, wie die vorigen, sondern zurück biegen, wie hier in den Figuren zu sehen ist.



Der Punkt, wo dieses geschiehet, wird der Wendungspunkt (point de rebrouſſement) genannt. Weil sie aber fast niemals vorkommen, so wollen wir sie ganz übergehen. Eine wichtigere Sache ist die Lehre von den vielfachen Punkten einer krummen Linie. Um aber diese Lehre deutlich vorzutragen, müssen wir erst zeigen, was das Verhältniß $\frac{0}{0}$ zu bedeuten hat, und auf den Ursprung desselben zurückkehren.

§. 11.

Wenn von einer heterogenen Funkzion zweier veränderlichen Größen x und y die vollständige Differenz genommen wird, so enthält die Differenz der Funkzion I) eine heterogene Funkzion von Δx und Δy die um einen Grad niedriger ist, und deren Koeffizienten wiederum Funkzionen von x und y sind; II) eine homogene Funkzion von Δx und Δy, welche vom nemlichen Grade ist,

als

als die gegebene, und die nemlichen Koeffizienten hat. Es sey gegeben folgende heterogene Funkzion vom dritten Grade,

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3$$

Wenn ihr von dieser Funkzion der Größen x und y die Differenz suchet (VII. H. §. 23.) und die Sätze zusammen bringet, welche mit den nemlichen Differenzen multiplizirt sind, so bekommet ihr

$$(\beta + 2\delta x + \varepsilon y + 3\eta x^2 + 2\theta xy + 1y^2)\Delta x$$
$$+ (\gamma + \varepsilon x + 2\zeta y + \theta x^2 + 2\iota xy + 3ky^2)\Delta y$$
$$+ (\delta + 3\eta x + \vartheta y)\Delta x^2$$
$$+ (\varepsilon + 2\theta x + 2\iota y)\Delta x\Delta y$$
$$+ (\zeta + \iota x + 3\varkappa y)\Delta y^2$$
$$+ \eta\Delta x^3$$
$$+ \theta\Delta x^2\Delta y$$
$$+ \iota\Delta y^2\Delta x$$
$$+ \varkappa\Delta y^3$$

Benennet man nun mit A, B, C. &c., die Funkzionen, welche hier in Haken eingeschlossen sind, so hat man zur Differenz $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + \eta\Delta x^3 + \theta\Delta x^2\Delta y + \iota\Delta y^2\Delta x + \varkappa\Delta y^3$ Ueberhaupt, wenn die gegebene Funkzion vom $n$ten Grade ist, so bekömmt die Differenz folgende Gestalt:

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + \&c.\&c. + K\Delta y^{n-1}$$
$$+ a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^2\Delta y^2 + \&c.\&c. + k\Delta y^n$$

Hier sind A, B, C, D, &c. ... K, lauter Funkzionen von x und y. Hingegen a, b, c, &c. ... k, sind die lezten Koeffizienten der Funkzion, nemlich die Koeffizienten,

ten, welche die Sätze in der Gleichung haben, wenn man x anstatt Δx, und y anstatt Δy schreibet.

Es sey nun nicht eine bloße Funkzion, sondern eine Gleichung von der $n$ten Ordnung zwischen x und y gegeben, welche diese Gestalt haben wird,

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c. \ldots = o$$

so bekömmt die vollständige Differenz derselben diese Form

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + e\Delta x^{n-3}\Delta x^3 + \&c. \end{array}\right\} = o$$

Läßt man die Sätze weg, wo mehr als eine Differenzen-Dimension ist, und setzet man dx und dy, anstatt Δx und Δy, so behält man $A\,dx + B\,dy = o$

$$\text{oder} \ldots B\,dy = -A\,dx$$

$$\text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$$

und hier sind A und B Funkzionen von x und y. Es kann geschehen, daß für gewisse Werthe von x und y, beide Funkzionen A und B zugleich o werden, und daß man bekomme $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$

Dieser Ausdruck aber giebt keinen verständlichen Werth des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$. Folglich muß man suchen diesen Werth auf eine andere Art zu finden. Wenn A und B null werden, so verschwinden $A\Delta x$ und $B\Delta y$. Das Verhältniß zwischen Δx und xy wird alsdann noch gegeben durch diese Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + c\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \&c. \end{array}\right\} = o$$

Wenn

Wenn die Differenzen sehr klein werden, so darf man nur die Sätze behalten, wo zwei Differenzen-Dimensionen vorhanden sind, und schreiben

$$C\,\partial x^2 + D\,\partial x\,\partial y + E\,\partial y^2 = o$$

oder, nachdem man durch ∂x^2 dividiret hat,

$$C + D\frac{\partial y}{\partial x} + E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o$$

Hier siehet man, daß man eine quadratische Gleichung auflösen müßte, um $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu finden. Wir wollen ferner den Fall setzen, daß C, D, E, null werden, sowohl als A und B, so ist alsdann das Verhältniß zwischen Δx und Δy gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + \&c. \\ + a\Delta x^n + b\Delta x^{n-1}\Delta y + cx^{n-2}\Delta y^2 + e\Delta x^{n-3}\Delta y^3 + \&c. \end{array}\right\} = o$$

Wenn man hier nur diejenigen Sätze behält, wo drei Differenzial-Dimensionen vorhanden sind, so bekömmt man $F\partial x^3 + G\partial x^2\partial y + H\partial x\partial y^2 + I\partial y^3 = o$

oder, nachdem man durch ∂x^3 dividiret hat,

$$F + G\frac{\partial y}{\partial x} + H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + I\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 = o$$

Man müste also eine Gleichung vom dritten Grade auflösen, um $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu bekommen.

Man siehet leicht ein, daß eine Gleichung vom vierten Grade aufgelöset werden müste, wenn auch F, G, H I null würden. Und so immer weiter. Wolte man auf solche Art den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ finden, so müste man erst-

lich

lich die Funkzionen A, B, C, D, E, F, G, H, I, u. s. f. haben. Und um diese Funkzionen zu erhalten, müste man von der gegebenen Funkzion die vollständige Differenz nehmen, welches aber meistens sehr beschwerlich seyn würde. Hier könt uns die Rechnung mit unvollständigen oder unendlich kleinen Differenzen sehr zu statten.

Man nehme die vollständige Differenz der Funkzion

$$\alpha+\beta x+\gamma y+\delta x^2+\varepsilon xy+\zeta y^2+\eta x^3+\theta x^2 y+\iota xy^2+\varkappa y^3$$

so bekömt man, wie kurz vorher gefunden worden,

$$A\Delta x = (\beta+2\delta x+\varepsilon y+3\eta x^2+2\theta xy+\iota y^2)\,\Delta x$$
$$+B\Delta y = (\gamma+\varepsilon x+2\zeta y+\theta x^2+2\iota xy\,3\varkappa y^2)\,\Delta x$$
$$+C\Delta x^2 = (\delta+3\eta x+\theta y)\,\Delta x^2$$
$$+D\Delta x\Delta y = (\varepsilon+2\theta x+2\iota y)\,\Delta x\Delta y$$
$$+E\Delta y^2 = (\zeta+\iota x+3\varkappa y)\,\Delta y^2$$
$$+\eta\Delta x^3+\theta\Delta x^2\,\Delta y+\iota\Delta x\Delta y^2+\varkappa\Delta y^3$$

Man schreibe allenthalben ∂x und ∂y anstatt Δx und Δy.
Man setze $A\partial x + B\partial y = o$
wo, vorgemeldeter Maaßen, unter A die Funkzion $\beta+2\delta x+\varepsilon y$ &c. und unter B die Funkzion $\gamma+\varepsilon x+2\zeta y+$ &c. verstanden wird. Man differenzire diese Gleichung, indem man sowohl ∂x als auch ∂y als beständig betrachtet, so wird man bekommen

$$C\partial x^2+D\partial x\partial y+E\partial y^2 = o$$

worunter C verstanden wird $\delta+3\eta x+\theta y$; unter D, $\varepsilon+\zeta\theta x+2\iota y$; unter E, $\zeta+\iota x+3\varkappa y$. Differenziret man diese lezte Gleichung wiederum, in der Voraussetzung, daß ∂x und ∂y beide beständig sind, so bekömmt man

$$\eta\partial x^3+\theta\partial x^2\partial y+\iota\partial x\partial y^2+\varkappa\partial y^3 = o$$

Mit einem Worte, in der vollständigen Differenz einer heterogenen Funkzion von x und y; wenn ihr jede, in Betrachtung des Δx und Δy oder dx und dy, homogene Funkzion, die darin enthalten ist, null machet; so entstehet jede folgende Gleichung, wenn die vorige differenziret wird, und wenn sowohl dx als dy als unveränderlich angenommen worden. Alle diese Gleichungen zwischen dx und dy sind aber nichts anders als die oben angeführten Gleichungen vom zweiten, dritten Grade, u. s. f. die man auflösen müste, um den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu finden, im Falle wo dieses Verhältniß $= \frac{o}{o}$ wird.

Gesetzet also, man hat eine Gleichung differenziret und gefunden

$$A\,dx + B\,dy = o$$

wo A und B Funkzionen von x und y sind. Gesetzet für einen gewissen Werth des x und für einen gewissen des y werde $A = o$, und $B = o$, so daß $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. So fahre man fort, und differenzire immer weiter, in der Voraussetzung, daß dx und dy beständig sind. Man halte ein, so bald man für $\frac{dy}{dx}$ einen wirklichen Werth findet.

Ein kurzes Exempel wird dieses Verfahren erläutern. Es sey gegeben diese Gleichung

$$2\,(y-b)^3 = 3\,(x-a)^3$$

so findet man anfänglich

$$2\,(y-b)^2\,dy = 3\,(x-a)^2\,dx$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{3\,(x-a)^2}{2\,(y-b)^2}$$

Man

Man will den Werth dieses Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ haben, für den Fall, wo $x = a$, uud $y = b$. Es ist klar, daß in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Man differenzire weiter, so kömmt, wenn dy und dx beständig sind,

$$2(y-b)\,dy^2 = 3(x-a)\,dx^2$$

$$\text{oder } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{3(x-a)}{2(y-b)}$$

Dieses giebt noch nichts, wenn $x = a$ und $y = b$. Man differenzire also zum dritten Male, so hat man

$$2\,dy^3 = 3\,dx^3$$

$$\text{oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

Das verlangte Verhältniß ist also jezt gefunden. Nun wollen wir das erforschte Verfahren auf die krummen Linien anwenden.

§. 12.

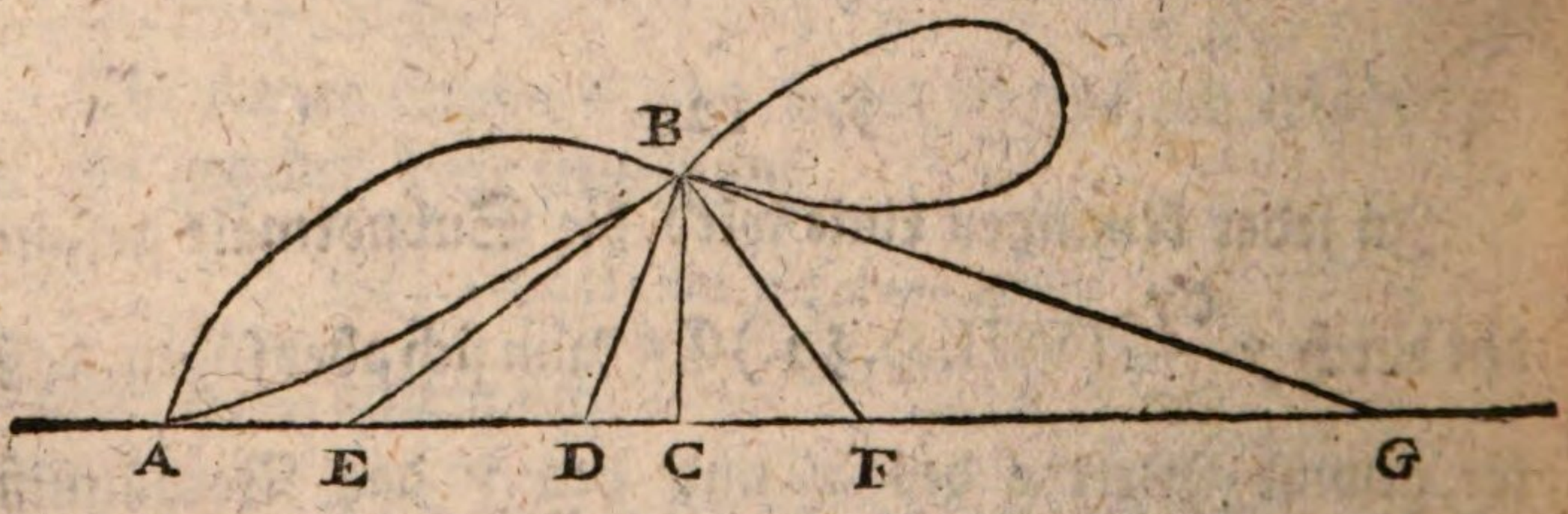
In jeder krummen Linie wird die Subnormale gefunden durch $y\frac{dy}{dx}$ (VIII. H. §2.) Es kann sich aber fügen, daß für gewisse Werthe des x und des y das Verhältniß $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ werde. In diesem Falle muß also weiter differenziret werden, mit der Voraussetzung, daß dy und dx

beständig sind, bis man eine Gleichung findet, wo $\frac{dy}{dx}$ einen verständlichen Werth giebet, wenn man darinn die angenommenen Werthe des y und des x setzet.

Es wird aber bei einem solchen Verfahren $\frac{dy}{dx}$ mehr als einen Werth bekommen, und folglich auch $y\,\frac{dy}{dx}$.

Denn wenn $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, so wird $\frac{dy}{dx}$ durch Gleichungen von höheren Graden bestimmet, welche mehrere Wurzeln haben. Also müssen in diesem Falle mehrere Tangenten für die angenommenen Werthe des x und des y Statt finden. Daraus läßt sich schließen, daß durch den angenommenen Punkt mehrere Zweige der krummen Linie durchgehen, nemlich so viel Zweige als Subtangenten oder Werthe des $\frac{dy}{dx}$ gefunden worden.

Um dieses desto begreiflicher zu machen, so laßt uns willkürlich eine krumme Linie oder einen Zug annehmen, wie man in beigefügter Figur siehet.



Der Punkt B gehöret zu beiden Zweigen der krummen Linie, und ebenfalls die Koordinaten BC und AC. Zu dem ei-

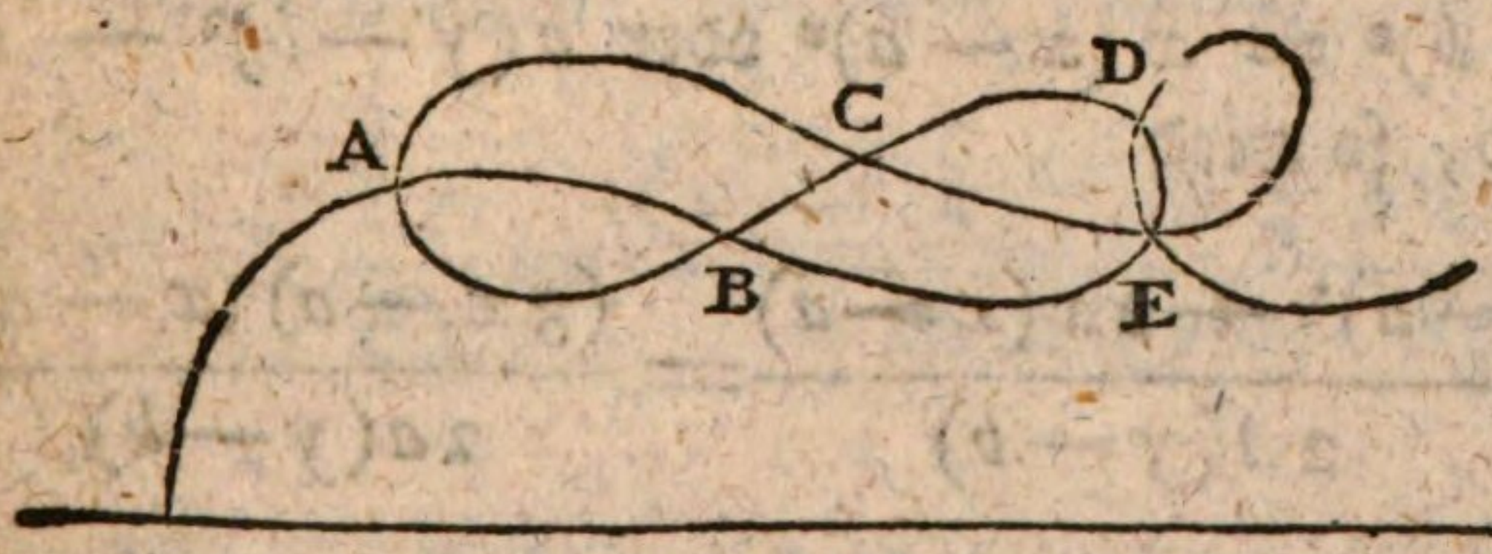
nen

nen Zweige gehöret die Tangente BG, die Subtangente CG und die Subnormale CD. Zum anderen gehöret die Tangente BE, die Subtangente CE und die Subnormale CF. Wolte man also aus der Gleichung dieser krummen Linie die Subnormale für den Punkt B finden, das ist für die Abzisse AC und die Applikate CB, so müste diese Subnormale nothwendig zwei Werthe bekommen, nemlich CD und CF, und in diesem Falle würde CF positiv und CD negativ seyn. Also würde auch $\frac{dy}{dx}$ zwei Werthe haben, einen positiven und einen negativen.

Wenn sich die krumme Linie öfter als zweimal in B schnitte, so müste $\frac{dy}{dx}$ auch mehr als zwei Werthe bekommen.

Ein solcher Punkt wie B, wo mehrere Zweige einander schneiden, heißt ein vielfacher Punkt der krummen Linie; nemlich es ist ein doppelter Punkt, wo sich zwei Zweige schneiden, ein dreifacher, wo sich drei Zweige schneiden, u.s.f.

Es giebt Linien, wo mehrere vielfache Punkte Statt finden. Laßt uns wiederum einen willkührlichen Zug annehmen, weil es doch möglich seyn könnte, daß irgend eine Gleichung, wenn man sie konstruirte, etwas ähnliches hervor brächte.



Hier wären A, B, C und D doppelte Punkte; und in E wäre ein dreifacher Punkt.

Bei der Untersuchung der vielfachen Punkte kömt es also darauf an zu erforschen 1.) wie viel es dergleichen Punkte in der Linie giebet, und 2) wie vielfach jeder Punkt ist.

§. 13.

Aufgabe.

Untersuchen, wie viel es vielfache Punkte in einer Linie giebt.

Auflösung. Man differenzire die Gleichung der krummen Linie, und in dem gefundenen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ mache man sowohl den Zähler als den Nenner zu Null. So hat man zwei annullirte Gleichungen, woraus man einen oder verschiedene Werthe von x und y ziehen kann. Man setze jeden Werth des x mit einem Werth des y in die gegebene Gleichung, und beobachte, welcher Werth des x und des y der gegebenen Gleichung Genüge leistet. So hat man die Koordinaten, wozu mehr als eine Subnormale gehöret, und folglich einen vielfachen Punkt der Linie. Findet man nun mehrere Paare solcher Koordinaten, so giebt es auch mehrere solche Punkte in der Linie.

Exempel *I.* Es sey die Gleichung einer krummen Linie $a(y-b)^2 = x(x-a)^2$ oder $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)^2 + 2x(x-a)}{2a(y-b)} = \frac{(3x-a)(x-a)}{2a(y-b)}$$

Man setze nun $(3x-a)(x-a) = o$

Die-

Dieſes giebt nun, je nachdem man die Gleichung durch $3x - a$, oder durch $x - a$ dividiret,

$$x - a = o, \quad \text{folglich } x = a$$

$$\text{oder } 3x - a = o, \quad \text{folglich } x = \frac{a}{3}$$

Man ſetze auch $2a(y - b) = o$

$$\text{ſo iſt} \quad y - b = o \text{ und } y = b$$

Man hat alſo zwei Werthe für x und einen für y. Wenn man ſie paarweiſe kombiniret, ſo iſt

$$\text{entweder} \quad x = a \text{ und } y = b$$

$$\text{oder} \quad x = \frac{a}{3} \text{ und } y = b$$

Setzet man in die gegebene Gleichung $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$, a anſtatt x, und b anſtatt y, ſo kömmt $o = o$, folglich bleibet die Gleichung richtig, und die Koordinaten a und b gehören wirklich zur krummen Linie. Da nun dieſe Koordinaten a und b, aus der Vorausſetzung, daß $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ entſtanden ſind, ſo müſſen ſie auch wirklich $\frac{dy}{dx}$ zu $\frac{o}{o}$ machen. Es war nemlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)^2 + 2x(x-a)}{2a(y-b)}$$

Wenn man hier anſtatt x, a ſetzet, und anſtatt y, b; ſo wird $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Weil alſo $\frac{dy}{dx}$ nicht durch eine

Gleichung vom ersten Grade bestimmet werden kann, so hat $\frac{dy}{dx}$ mehrere Werthe, folglich auch $y\frac{dy}{dx}$. Folglich gehören zu dem Punkte, wo $x = a$ und $y = b$ mehrere Subnormalen. Folglich ist es kein einfacher, sondern ein vielfacher Punkt.

Anstatt anzunehmen, $x = a$ und $y = b$, laßt uns setzen $x = \frac{a}{3}$, $y = b$, in der Gleichung $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$, so kömmt

$$o - \frac{a}{3}\left(\frac{a}{3} - a\right) = o$$

$$-\left(\frac{a}{3} - a\right) = o$$

$$-\tfrac{1}{3}a + a = o$$

welches nicht Genüge leistet, weil das erste Glied der Gleichung nicht null wird, wie das zweite.

Also gehören die Koordinaten $x = \frac{a}{3}$ und $y = b$ nicht zur krummen Linie, und folglich ist hier kein vielfacher Punkt zu suchen.

Woraus dann erhellet, daß die krumme Linie, worin $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$, nur einen vielfachen Punkt hat, nemlich an der Stelle, wo $x = a$, und $y = b$.

Exempel II. Es sey gegeben eine krumme Linie, worin $y^4 + b x^3 = a x y^2$ —

oder

oder $y^4 - a x y^2 + b x^3 = o$,

so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{a y^2 - 3 b x^2}{4 y^3 - 2 a x y}$

Man nehme an $a y^2 - 3 b x^2 = o$

und $4 y^3 - 2 a x y = o$ oder $2 y^2 - a x = o$

Aus der ersten Gleichung ist

$$y^2 = \frac{3 b x^2}{a}$$

Aus der zweiten $y^2 = \frac{a x}{2}$

folglich $\frac{3 b x^2}{a} = \frac{a x}{2}$

$$\frac{3 b x}{a} = \frac{a}{2}$$

$$6 b x = a^2$$

$$x = \frac{a^2}{6 b}$$

Ferner ist aus der ersten Gleichung

$$x^2 = \frac{a y^2}{3 b}$$

Aus der zweiten, $x^2 = \frac{4 y^4}{a^2}$

folglich $\frac{a\ y^2}{3\ b} = \frac{4\ y^4}{a^2}$

$$\frac{a}{3\ b} = \frac{4\ y^2}{a^2}$$

$$a^3 = 12\ b\ y^2$$

$$\frac{a^3}{12\ b} = y^2$$

$$\pm a \sqrt{\frac{a}{12\ b}} = y$$

Ferner kann man auch in den Gleichungen $ay^2 - 3bx^2 = o$, und $4y^3 - 2axy = o$, annehmen $x = o$ und $y = o$. Man hat also $x = o$; oder $y = o$, $x = \frac{a^2}{6b}$, $y = \pm a \sqrt{\frac{a}{12b}}$. Die letzten Werthe von x und y leisten der gegebenen Gleichung $y^4 + bx^3 - axy^2 = o$ kein Genüge. Also sind nur $x = o$, und $y = o$ zu gebrauchen. Weil also nur ein Paar Koordinaten die Bedingungen erfüllet, so ist in der Linie auch nur ein vielfacher Punkt, nemlich an der Stelle, wo $x = o$ und $y = o$, das ist am Ursprunge der Abzissen.

§. 14.

Wenn ein vielfacher Punkt gefunden worden, so soll man bestimmen, wie vielfach er ist.

Auflösung. Nachdem man die beiden Koordinaten bestimmet hat, die zu einem vielfachen Punkte gehören, und die folglich $\frac{dy}{dx}$ zu $\frac{o}{o}$ machen, so differenzire man weiter,

ter, und halte ein, sobald man eine Gleichung bekömmt, welche für $\frac{dy}{dx}$ einen verständlichen Werth giebt. So oft man differenziret hat, so viel Grade wird die Gleichung haben, welche den Werth des $\frac{dy}{dx}$ bestimmet, so viel Wurzeln wird auch diese Gleichung haben, und so viel Zweige der krummen Linie werden sich in dem gegebenen Punkte schneiden, so vielfach wird folglich der Punkt seyn; vorausgesetzet, nemlich, daß die Gleichung lauter wirkliche Wurzeln habe. Sind einige Wurzeln imaginär, so ist der Punkt nur so vielfach, als wirkliche Wurzeln sind; die übrigen Zweige der Linie sind nur imaginär oder unsichtbar.

Exempel I. Man hat gefunden, daß in der Linie $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = o$ ein vielfacher Punkt an dem Orte ist, wo $x = a$ und $y = b$. Wie vielfach ist nun dieser Punkt? Man hat gefunden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-a)(x-a)}{2a(y-b)} \text{ oder } 2a(y-b)dy = (3x-a)(x-a)dx$$

Man differenzire nun weiter, und behandele dy, und dx als beständig, so kömmt

$$a\,d\,y^2 = (3x - 2a)\,d\,x^2$$

$$\text{oder } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3x - 2a}{a}$$

oder für den Fall, wo $x = a$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{3a - 2a}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Weil

Weil also $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

so ist $\frac{dy}{dx} = \pm 1$

Woraus man siehet, daß hier zwei Werthe des Verhältnisses $\frac{dy}{dx}$ Statt finden, und daß folglich der Punkt doppelt ist.

Exempel II. Es sey die Gleichung einer krummen Linie $y^4 - axy^2 + bx^3 = o$

so hat man gefunden, daß ein vielfacher Punkt am Ursprunge der Abzissen Statt findet, wo $x = o$ und $y = o$, man hat auch gefunden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay^2 - 3bx^2}{4y^3 - 2axy}$$

oder $4y^3\,dy - 2axy\,dy - ay^2\,dx + 3bx^2\,dx = o$

folglich $6y^2\,dy^2 - axdy^2 - 2aydxdy + 3bxdx^2 = o$

Wenn $y = o$ und $x = o$, so kömmt hier kein verständlicher Werth heraus. Also weiter

$$4y\,dy^3 - a\,dx\,dy^2 + b\,dx^3 = o$$

$$4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b = o$$

Wenn $y = o$, so hat man

$$-a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b = o$$

daher $$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Welches einen zweifachen Punkt anzeiget. Wenn man aber die Gleichung

$$4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - a\frac{dy}{dx} + b = o$$

Durch $4y$ dividiret, so wird

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{a}{4y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{b}{4y} = o$$

Ist nun $y = o$, so wird $\frac{a}{4y}$ unendlich und $\frac{b}{4y}$ unendlich, und wenn man das Unendliche durch ∞ ausdrücket,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \infty + \infty = o$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = o$$

$$\frac{dy}{dx} = o$$

folglich ist auch o eine Wurzel der Gleichung. Der Punkt ist also dreifach, und die Wurzel o zeiget an, daß ein Zweig der Linie ist, wo die Subnormale $o.y$ oder o wird, folglich wo die Tangente mit der Direktrisse parallel wird.

Zusatz

Zusatz *I.* Wenn die Gleichung, woraus $\frac{dy}{dx}$ gezogen wird, imaginäre Wurzeln hat, so sind in der Linie so viel imaginäre Zweige als imaginäre Wurzeln. Trift es sich, daß die Punkte wo solche imaginäre Zweige einander begegnen, außerhalb der krummen Linie liegen, so nennet man sie konjugirte Punkte.

Zusatz *II.* Es kann sich ferner treffen, daß die Gleichung gleiche Wurzeln hat. In diesem Falle werden die Subnormalen gleich, folglich auch die Tangenten, nemlich die Zweige haben in einem Punkte die nemliche Tangente. Also schneiden sie einander nicht eigentlich, sondern sie berühren einander nur in solchen Punkten.

Ende des zehnten Hauptstückes und des ersten Bandes.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Burja, Abel, 1752-1816

Erleichterter Unterricht in der höheren Meßkunst, oder deutliche Anweisung zur Geometrie der krummen Linien

Bd.: 1

Berlin und Libau (1788)

Math.p. 61-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137656-3
VD18 80529097